Bouligand, Georges.
Leçons de ... vectorielle 1924

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

PREMIÈRE PARTIE

OPÉRATIONS VECTORIELLES EN GÉOMÉTRIE LINÉAIRE

I

Scalaires et vecteurs.

1. Définitions et généralités. — Suivant les questions, le mot *vecteur* possède divers sens. Nous distinguerons plusieurs catégories de vecteurs.

VECTEURS LIÉS. — Par vecteur lié, il faut entendre une portion de droite, telle que AB, dont on spécifie l'*origine* A et l'*extrémité* B. La droite AB est le *support* du vecteur.

VECTEURS GLISSANTS. — Un vecteur glissant diffère d'un vecteur lié par la latitude qui lui est offerte de glisser le long de son support. Pour faciliter certains raisonnements, nous aurons l'occasion de représenter un vecteur glissant par l'un des vecteurs liés qu'on obtient en fixant arbitrairement l'origine du vecteur glissant sur son support.

VECTEURS LIBRES. — Pour un vecteur libre, on fixe seulement la longueur, la direction et le sens. Le support n'est plus donné qu'en direction.

Dans l'ensemble des vecteurs liés, il y a une infinité de représentations qui conviennent à un vecteur libre donné : tous les vecteurs liés susceptibles de représenter ainsi un même vecteur libre sont deux à deux *égaux*, *parallèles* et *de même sens*. On exprime encore l'ensemble de ces trois qualités en disant qu'ils sont *équipollents*.

A la locution *vecteur libre*, on substitue souvent l'une des suivantes : *grandeur dirigée*, *grandeur géométrique*, *grandeur vectorielle*. Toutes ces expressions sont exactement équivalentes, et nous les emploierons indifféremment.

2. A la notion de grandeur dirigée s'oppose celle de *grandeur scalaire*. La dénomination de scalaire s'applique à toute grandeur dont la mesure est un nombre positif ou négatif. Par exemple, une durée, une masse, un travail sont des grandeurs scalaires.

Par contre, une vitesse, une accélération, une force sont des vecteurs. Dans la mécanique du point, ces vecteurs se rangent d'ailleurs dans la catégorie des vecteurs liés, car ils sont appliqués au point même dont on étudie le mouvement.

Dans la statique du corps solide, la possibilité de transporter une force le long de sa ligne d'action fait de la force un vecteur glissant.

Il nous reste à donner un exemple de vecteur libre. Nous l'emprunterons à la notion de translation.

3. Translation. — Rappelons d'abord ce que signifie la locution : *transformation ponctuelle*. Sa signification est extrêmement générale. Elle désigne toute loi, simple ou compliquée, qui, dans l'espace, permet de faire correspondre à un point M un autre point M′.

On appelle TRANSLATION une transformation ponctuelle dont la loi de correspondance s'énonce ainsi :

Le vecteur MM′, *qui a pour origine un point* M *et pour extrémité son transformé* M′, *est équipollent à un vecteur fixe* AA′.

Il résulte de cette définition que le transformé du point A par la translation est le point A′ lui-même. Il en résulte aussi que, pour définir une translation, il nous suffira de donner un point quelconque et son transformé.

Mais alors, puisqu'on peut choisir arbitrairement l'origine du vecteur AA′, la donnée d'une translation se ramène à celle d'un vecteur libre.

4. Opérations vectorielles. — De même que l'algèbre ordinaire étudie, sous le nom d'opérations algébriques, certains modes de composition des nombres, de même on peut définir certaines opérations, certains modes de composition portant sur les *grandeurs vectorielles*. C'est donc sur les vecteurs libres que se portera désormais notre attention. Ce sont eux que nous soumettrons aux opérations vectorielles [1].

Par sa nature même, une grandeur vectorielle ne dépend d'aucun système d'axes particulier : par exemple une vitesse, en grandeur vectorielle, dépend uniquement du corps solide auquel le mouvement est rapporté, et non de tel ou tel trièdre qu'on liera à ce corps, pour réaliser la détermination analytique de ce mouvement. Autrement dit, *les grandeurs vectorielles ont un caractère intrinsèque.*

Nous ne classerons, sous le nom d'opérations vectorielles, que des modes de composition des vecteurs libres, doués du même caractère intrinsèque.

5. Notations. — Un vecteur libre sera représenté par une lettre grasse. C'est ainsi que nous écrirons [2]

$$\mathbf{V}.$$

(1) Ce point de vue, un peu restrictif, sera généralisé plus loin (n° 95). Nous l'adoptons provisoirement, pour simplifier l'exposition.

(2) Dans le but de diminuer les difficultés typographiques, l'éditeur a partout remplacé la notation $\overrightarrow{V}$, qui désigne un vecteur libre, par la notation **V**. Il nous arrivera également de désigner des vecteurs libres par les lettres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, etc. Ce point sera rappelé à l'attention du lecteur en temps utile.

Il nous arrivera également de désigner par la notation

AB

le vecteur libre qui admet comme représentation le vecteur lié AB, ou, si l'on préfère s'exprimer autrement, la grandeur vectorielle de AB.

Dans le calcul vectoriel, nous rencontrerons deux sortes d'égalités : des égalités ordinaires ou scalaires, et des égalités vectorielles. Les premières ont lieu entre des grandeurs scalaires, dont elles expriment la communauté de valeur. Une égalité vectorielle traduit de même une communauté de grandeur vectorielle entre deux vecteurs libres.

Sans crainte de troubler la compréhension, nous continuerons à employer le symbole ordinaire $=$ pour noter indifféremment les égalités scalaires et les égalités vectorielles.

II

L'addition géométrique et la composition des translations.

6. Somme géométrique de n vecteurs libres. — Soient n vecteurs libres : représentons chacun d'eux par un vecteur lié, de manière que l'origine de chaque vecteur représentatif coïncide avec l'extrémité du précédent. Soient

$$A_0A_1, \quad A_1A_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1}A_n$$

les vecteurs liés ainsi obtenus.

Par définition la somme géométrique de nos n vecteurs libres est un nouveau vecteur libre, représentable par le vecteur lié A_0A_n.

Soit à faire la somme géométrique de deux vecteurs **U** et **V**. A un point O, lions deux vecteurs OA et OB tels que

$$\mathbf{OA} = \mathbf{U} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{OB} = \mathbf{V}.$$

La construction précédente nous montre que la somme géométrique $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ est la grandeur vectorielle de la diagonale OS du parallélogramme construit sur OA et OB.

Soient de même trois vecteurs **U**, **V**, **W**, non situés dans un même plan. A un point O, lions trois vecteurs OA, OB, OC tels que

$$\mathbf{OA} = \mathbf{U}, \qquad \mathbf{OB} = \mathbf{V}, \qquad \mathbf{OC} = \mathbf{W}.$$

La construction précédente nous apprend que la somme géométrique $\mathbf{U} + \mathbf{V} + \mathbf{W}$ est la grandeur vectorielle de la diagonale du parallélépipède construit sur OA, OB et OC.

De ces deux remarques, il résulte que jusqu'à $n = 3$, l'addition vectorielle est *commutative*, c'est-à-dire indépendante de l'ordre attribué aux vecteurs. Il en résulte

aussi qu'elle est *associative*, c'est-à-dire qu'on peut, dans une telle opération, remplacer deux vecteurs par leur somme géométrique. On a donc

$$(\mathbf{U}+\mathbf{V})+\mathbf{W}=\mathbf{U}+(\mathbf{V}+\mathbf{W}).$$

Ces propriétés sont absolument générales. Nous ne développerons pas la démonstration complète qui est entièrement calquée sur le raisonnement analogue relatif à l'addition algébrique.

Remarque. — Pour le moment, il n'est pas utile de mentionner la soustraction géométrique : nous la trouverons au nº 13, comme cas particulier d'une classe d'opérations plus générales.

7. Composition de deux translations. — Expliquons d'abord en quoi consiste la composition de deux transformations ponctuelles quelconques, prises dans un ordre donné.

Par la loi régissant la première transformation, nous pourrons faire correspondre à chaque point M de l'espace un autre point M′. A ce point M′ correspondra de même, par la loi qui régit la seconde transformation, un nouveau point M″.

Entre le point M et le point M″, il y a manifestement une nouvelle correspondance, dont la loi est d'ailleurs plus ou moins facile à dégager. Quoi qu'il en soit, la transformation régie par cette loi s'appelle la *composée* des deux précédentes, dans l'ordre où nous les avons successivement appliquées.

Étudions en particulier la composition de deux translations. Soit une première translation, définie par le vecteur libre **T**. Par cette translation, nous déduisons du point M un point M′. Soit une deuxième translation, définie par le vecteur libre **T′** : elle fait correspondre au point M′ un point M″. Tous les vecteurs liés tels que MM″ sont équipollents. Donc la transformation composée est une translation **T″** dont le vecteur libre peut se représenter par **MM″**. De même **T** et **T′** étaient respectivement représentables par **MM′** et **M′M″**. D'après la définition de la somme géométrique, nous avons donc

$$\mathbf{T}''=\mathbf{T}+\mathbf{T}',$$

en convenant que le signe + symbolise ici une addition géométrique.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Deux translations se composent entre elles suivant le processus de l'addition géométrique pour donner une nouvelle translation.

Ce théorème s'étend de lui-même à la composition d'un nombre quelconque de translations.

La composition des translations présente certains caractères abstraits intéressants à étudier. Pour les faire mieux saisir, nous comparerons la composition des translations à la composition de deux symétries par rapport à un point. De la différence entre ces deux problèmes ressortiront les propriétés que nous avons en vue.

8. Composition de deux symétries par rapport à un point. — Étant donné un point O, on dit que deux points M et M′ sont *symétriques* par rapport à O lorsque ce point est le milieu du segment MM′. La symétrie est donc une transformation

ponctuelle particulière : pour trouver le transformé d'un point M, on mène MO et on le prolonge d'une longueur égale.

Envisageons une première symétrie par rapport à un point O, puis une seconde par rapport à un point O'. La première transforme un point M en un point M', que la seconde transforme à son tour en M''. Le vecteur MM'' possède les propriétés suivantes :

1° Il est parallèle à OO' et de même sens.

2° Sa longueur est double de celle de OO'.

Donc la transformation qui permet de passer de M à M'' est une translation.

La composition que nous venons d'étudier n'est pas commutative : si l'on échange l'ordre des deux symétries, l'ordre des points O et O' est également modifié. Donc la translation résultante change de sens (en conservant sa direction et son amplitude).

9. Différences entre la composition des translations et celle des symétries. — Une première différence vient d'être signalée : il y a commutativité dans la composition des translations, il n'y a pas commutativité dans la composition de deux symétries centrales (nous disons en abrégé symétrie centrale, au lieu de symétrie par rapport à un point).

Mais un autre fait retiendra plus encore notre attention : il réside dans l'opposition des deux circonstances suivantes :

1° En composant deux translations (ou un nombre quelconque de translations), c'est encore une translation qu'on obtient.

2° En composant deux symétries centrales, ce n'est plus une symétrie centrale que l'on obtient, mais une translation.

Disons que les translations sont des transformations d'une même famille, que les symétries centrales sont des transformations d'une même autre famille.

La famille des translations est *fermée*, c'est-à-dire que deux membres de cette famille ne sauraient, par composition, engendrer de transformation étrangère.

Par contre, celle des symétries centrales ne l'est pas, car la composition, au sein de cette famille, donne naissance à des transformations étrangères.

10. Notion générale des groupes de transformation. — On dit qu'une famille de transformations constitue un *groupe* lorsqu'elle est fermée, c'est-à-dire lorsque la composition, au sein de cette famille, n'y fait jamais naître de transformations étrangères. Nous pouvons donc résumer les résultats du numéro précédent sous la forme suivante :

Les translations forment un groupe.

Les symétries centrales ne forment pas un groupe.

11. Translations coplanaires. — Envisageons maintenant une nouvelle famille : celle des translations qui sont parallèles à un même plan, ou, si l'on veut, celle des translations *coplanaires*. En composant deux transformations de cette famille, c'est encore à une transformation de la même famille que l'on est conduit. Donc cette famille est encore un groupe. Elle est d'ailleurs plus restreinte que la famille générale des translations. Pour cette raison, on dit qu'elle constitue un *sous-groupe* du groupe des translations.

12. Translations colinéaires. — Envisageons maintenant les translations parallèles à une même droite ou colinéaires. Elles forment encore un groupe. Celui-ci joue d'ailleurs le rôle de sous-groupe dans le groupe général des translations et aussi dans chacun de ses sous-groupes coplanaires, issus d'un plan parallèle à la droite considérée.

Il est important de remarquer que dans ce dernier sous-groupe les opérations se composent suivant le processus de l'addition algébrique. Nous sommes ici dans le cas où l'addition géométrique se réduit à l'addition algébrique.

III

Expression d'un vecteur quelconque. Systèmes vectoriels fondamentaux. Coordonnées. Changement de coordonnées.

13. Produit d'un vecteur libre par un scalaire. — On appelle produit d'un vecteur libre **V** par un scalaire m, et on représente par la notation

$$m\mathbf{V},$$

un nouveau vecteur libre parallèle au premier, ayant pour longueur le produit de la longueur de **V** par la valeur absolue de m, et pour sens le sens de **V** ou le sens opposé, suivant que m est positif ou négatif.

Dans le cas où m est égal à -1, on obtient le vecteur $-\mathbf{V}$, qu'on appelle aussi l'*opposé* du vecteur **V**. De la définition générale qui précède, il résulte que l'on a

$$\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}.$$

En combinant avec l'addition géométrique la multiplication d'un vecteur par m, on peut définir un type d'opérations plus général, contenu dans la formule

$$m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2 + \ldots + m_k\mathbf{V}_k.$$

Ce type comprend, comme cas particulier, la *soustraction géométrique* : il suffit en effet de supposer que l'opération précédente porte seulement sur deux vecteurs $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ et que les coefficients m_1 et m_2 se réduisent respectivement à 1 et à -1. On obtiendra alors la différence géométrique $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$. Cette remarque justifie la règle suivante : pour faire la différence géométrique de deux vecteurs, on fait la somme géométrique du premier vecteur et de l'opposé du second.

14. Décomposition d'un vecteur à l'aide de trois vecteurs fondamentaux. — Soient O, A, B, C quatre points non situés dans un même plan. *Dans l'espace à trois dimensions*, tout vecteur libre **V** sera la somme géométrique

de trois autres vecteurs libres, respectivement parallèles à OA, OB, OC : en effet, appelons M un point tel que l'on ait

$$\mathbf{OM} = \mathbf{V}$$

(cette condition détermine le point M d'une manière unique). Pour opérer la décomposition précédente, on construira sur les demi-droites indéfinies OA, OB, OC comme supports d'arêtes, un parallélépipède de diagonale OM. Le problème admet une solution et une seule. Soient OA_1, OB_1, OC_1 les vecteurs partiels ainsi obtenus. Ils sont liés aux vecteurs *fondamentaux* OA, OB, OC par des relations de la forme

$$\mathbf{OA}_1 = x\mathbf{OA}, \qquad \mathbf{OB}_1 = y\mathbf{OB}, \qquad \mathbf{OC}_1 = z\mathbf{OC},$$

où x, y, z désignent des quantités scalaires qui expriment en grandeur et signe le rapport de chaque vecteur de décomposition au vecteur fondamental correspondant. La relation

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OA}_1 + \mathbf{OB}_1 + \mathbf{OC}_1$$

prend donc la forme

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC} \tag{1}$$

ou, en désignant par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les grandeurs vectorielles des vecteurs fondamentaux,

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}. \tag{1 bis}$$

Ce deuxième mode d'écriture convient aux questions où n'interviennent que des vecteurs libres, c'est-à-dire où les données sont indifférentes à une translation quelconque.

En résumé, tout vecteur libre V peut s'exprimer linéairement, sous la forme (1 bis), en fonction de trois autres vecteurs libres, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, non coplanaires. A chaque vecteur libre correspond un système unique de nombres (x, y, z), qui constituent ses *composantes* (ou encore ses coordonnées) dans le système fondamental $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Inversement, à chaque système de nombres (x, y, z), il correspond un vecteur libre et un seul.

15. Coordonnées d'un point. — Reprenons le système fondamental OA, OB, OC. Nous appellerons *coordonnées* du point M dans ce système les composantes x, y, z de la grandeur vectorielle de OM. Un point n'a qu'un système de coordonnées; un système de coordonnées ne convient qu'à un seul point. Les méthodes basées sur la substitution aux points de leurs coordonnées constituent la géométrie analytique.

16. Géométrie linéaire et géométrie métrique. — Dans tout ce qui précède, nous n'avons eu à comparer entre elles que *des longueurs portées*, ou bien *par la même droite*, ou bien *par des droites parallèles* (1). Si l'on procède à une classification des propositions de la géométrie ordinaire, et si l'on met à part celles qui respectent cette condition, on obtient un ensemble de théorèmes qui constituent, par définition, la *géométrie linéaire* : il n'y est jamais question ni de la mesure d'un

(1) En particulier, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les longueurs de OA, OB, OC. Dans tous les cours de géométrie analytique, on convient de les prendre égales à l'unité. De ce fait, on adopte donc dès le début, d'une manière exclusive, le point de vue métrique.

angle, ni du rapport de deux longueurs portées dans des directions différentes. Dès qu'on fait intervenir ces notions, on quitte la géométrie linéaire pour passer à la géométrie métrique. Il est d'ailleurs possible de donner pour la géométrie linéaire une construction logique pleinement autonome. Nous en ferons connaître ultérieurement le principe. Pour le moment, il nous suffit d'avoir donné à nos lecteurs le moyen de distinguer à coup sûr une proposition du type linéaire et une proposition du type métrique. C'est au point de vue linéaire que nous allons continuer à nous p acer.

17. Traduction d'une égalité vectorielle en égalités ordinaires. — Considérons par exemple l'égalité vectorielle

$$\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_k\mathbf{v}_k.$$

Introduisons les composantes de chaque vecteur dans le système fondamental $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et soient

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= x_1\mathcal{A} + y_1\mathcal{B} + z_1\mathcal{C}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{v}_k &= x_k\mathcal{A} + y_k\mathcal{B} + z_k\mathcal{C}, \\ \mathbf{V} &= X\mathcal{A} + Y\mathcal{B} + Z\mathcal{C}. \end{aligned}$$

De l'égalité vectorielle donnée, nous déduisons deux modes de décomposition d'un même vecteur suivant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Ces deux modes devant être identiques, on en conclut que l'égalité vectorielle proposée équivaut, dans l'espace à trois dimensions, à trois égalités scalaires :

$$\begin{aligned} X &= m_1x_1 + \ldots + m_kx_k, \\ Y &= m_1y_1 + \ldots + m_ky_k, \\ Z &= m_1z_1 + \ldots + m_kz_k. \end{aligned}$$

18. Changement de coordonnée s. — On peut traiter la question au point de vue des vecteurs libres et au poin t de vue des points.

I. — Considérons d'abord un vecteur libre $\mathbf{U}$. Choisissons, pour l'exprimer, trois vecteurs libres non coplanaires $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Nous obtiendrons alors pour composantes x, y, z, et nous aurons

$$(2) \qquad \mathbf{U} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}.$$

Prenons maintenant un second système fondam ental de vecteurs $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ qui ne soient pas eux-mêmes coplanaires. Nous déterm inerons ces vecteurs dans le premier système fondamental par des relations

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}' &= a_1\mathcal{A} + b_1\mathcal{B} + c_1\mathcal{C}, \\ \mathcal{B}' &= a_2\mathcal{A} + b_2\mathcal{B} + c_2\mathcal{C}, \\ \mathcal{C}' &= a_3\mathcal{A} + b_3\mathcal{B} + c_3\mathcal{C}. \end{aligned} \right.$$

Dans le nouveau système, nous aurons

$$\mathbf{U} = x'\mathcal{A}' + y'\mathcal{B}' + z'\mathcal{C}';$$

en multipliant respectivement les relations (3) par x', y', z' et ajoutant, nous obtenons un second mode de décomposition de **U** suivant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Ce second mode doit être identique au premier. Nous devrons donc avoir

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y = b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z'. \end{cases}$$

Les formules (4) permettent de résoudre tous les problèmes de transformation de coordonnées (ou de composantes) pour les vecteurs libres.

II. — Soit maintenant à effectuer un changement de coordonnées pour un point. Il est commode de distinguer deux cas :

1° On passe du système fondamental OABC à un autre OA'B'C', de même origine et défini par les formules (3), en posant

$$\mathbf{OA} = \mathcal{A}, \qquad \mathbf{OB} = \mathcal{B}, \qquad \mathbf{OC} = \mathcal{C},$$
$$\mathbf{OA'} = \mathcal{A}', \qquad \mathbf{OB'} = \mathcal{B}', \qquad \mathbf{OC'} = \mathcal{C}';$$

en posant en outre $\mathbf{OM} = \mathbf{U}$, on est ramené au cas précédent, à cause de l'identité entre les coordonnées de M et les composantes de **U**. Les formules (4) résolvent la question.

2° On passe du système OABC à un autre O'A'B'C' d'origine distincte. En posant toujours

$$\mathbf{OA} = \mathcal{A}, \qquad \mathbf{OB} = \mathcal{B}, \qquad \mathbf{OC} = \mathcal{C},$$

la nouvelle origine O' est définie en donnant

$$\mathbf{OO'} = x_0\mathcal{A} + y_0\mathcal{B} + z_0\mathcal{C}.$$

Pour fixer les points A', B', C', il suffit alors de se donner

$$\mathbf{O'A'} = \mathcal{A}', \qquad \mathbf{O'B'} = \mathcal{B}', \qquad \mathbf{O'C'} = \mathcal{C}',$$

en fonction de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, par les formules (3). Dans ce cas, on peut faire d'abord la translation **OO'**, qui amène OABC en $O'A_1B_1C_1$. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de M dans ce système auxiliaire. On résout la question par les deux systèmes de formules :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1, \\ y &= y_0 + y_1, \\ z &= z_0 + z_1, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x_1 &= a_1x' + a_2y' + a_3z'. \\ y_1 &= b_1x' + b_2y' + b_3z'. \\ z_1 &= c_1x' + c_2y' + c_3z'. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, les formules obtenues sont du premier degré.

IV

Fonctions scalaires d'un point ou d'un vecteur.

19. Fonctions de point. — A chaque point M de l'espace, faisons correspondre, par une loi quelconque, un scalaire λ; on dit que λ est une fonction scalaire du point M, et on la représente par la notation λ (M). Si le point M est rapporté à un système fondamental OA, OB, OC, la fonction précédente pourra s'exprimer à l'aide des trois coordonnées x, y, z de M dans ce système. La donnée effective de la fonction ne peut d'ailleurs se faire que par l'intermédiaire d'un système fondamental déterminé. Mais la fonction une fois donnée, nous n'aurons en vue que ses propriétés, qui sont indépendantes de son expression dans tel ou tel système fondamental.

A cette classe appartiennent la continuité et la dérivabilité, qui sont suffisamment étudiées dans les cours d'algèbre pour qu'il n'y ait pas lieu d'y revenir. Rappelons seulement que si le point M a pour coordonnées x, y, z dans un premier système fondamental, et x', y', z' dans un autre, les formules de transformation étant

$$(5)\qquad \begin{cases} x = x_0 + a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y = y_0 + b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z = z_0 + c_1x' + c_2y' + c_3z', \end{cases}$$

on passera des dérivées partielles du premier système à celles du deuxième par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x'} = a_1\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} + b_1\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + c_1\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial y'} = a_2\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} + b_2\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + c_2\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial z'} = a_3\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} + b_3\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + c_3\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}, \end{cases}$$

qui résultent de la théorie générale du changement de variables (appliquer tout simplement la définition des dérivées partielles et le théorème des fonctions composées).

20. Polynomes. — Si λ s'exprime par un polynome en x, y, z dans un système fondamental, il en est de même dans tous les systèmes fondamentaux, puisque les seconds membres des formules (5) sont des fonctions algébriques et entières en x', y', z'. En outre ces fonctions sont du premier degré, et d'ailleurs, il en est de même des formules qui permettraient de calculer x', y', z' en fonction de x, y, z. Soit n le degré d'un polynome lorsqu'on l'exprime en fonction de x, y, z, et n' son degré lorsqu'on l'exprime en fonction de x', y', z'. On passe de la première expression à la seconde à l'aide des formules (5), et puisqu'elles sont du premier degré on ne peut avoir

$$n' > n.$$

Inversement, on pourrait remonter de l'expression en x', y', z' à l'expression en x, y, z par les formules inverses des formules (5) qui sont également linéaires.

On ne peut donc avoir

$$n > n'.$$

Donc, on a nécessairement

$$n = n'.$$

Ainsi donc, un polynome est une fonction de point dont le degré possède le caractère intrinsèque requis pour trouver place dans cette étude.

21. Fonctions scalaires du premier degré. — Les fonctions scalaires les plus simples sont celles du premier degré. Le lieu des points où s'annule une telle fonction est un plan : en effet, soient O, A, B trois points, non alignés, où s'annule cette fonction. Appelons C un quatrième point, en dehors du plan OAB. En posant

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC},$$

nous aurons pour la fonction étudiée une expression du premier degré

$$\lambda(M) = ux + vy + wz + h,$$

qui doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° s'annuler au point O, c'est-à-dire pour $x = y = z = 0$,

2° s'annuler au point A, c'est-à-dire pour $x = 1,\ y = z = 0$,

3° s'annuler au point B, c'est-à-dire pour $y = 1,\ x = z = 0$.

Ces conditions entraînent respectivement $h = 0$, $u = 0$, $v = 0$. Donc, dans le système fondamental choisi, nous aurons

$$\lambda(M) = wz.$$

Par suite, tous les points M annulant $\lambda(M)$ sont déterminés par l'équation

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB},$$

qui exprime que OM est contenu dans le plan OAB.

Nous n'insisterons pas davantage sur cet ordre d'idées, très voisin de la géométrie analytique ordinaire, et nous dirons un mot des fonctions scalaires d'un vecteur libre.

22. Fonctions scalaires d'un vecteur libre. — A chaque vecteur libre **V**, faisons correspondre une quantité scalaire μ. Nous obtiendrons une *fonction scalaire du vecteur* **V**. Une telle fonction peut se représenter par la notation

$$\mu(\mathbf{V}).$$

Théoriquement, cette nouvelle notion ne diffère pas de celle de fonction de point : en effet de $\mu(\mathbf{V})$, on peut déduire une fonction d'un certain point M : il suffit pour cela de lier à une origine O arbitraire un vecteur OM tel que

$$\mathbf{OM} = \mathbf{V}.$$

Pratiquement, nous nous limiterons aux polynomes homogènes. *La propriété d'homogénéité joue ici un rôle capital*, par le fait qu'elle appartient aux formules (4), qui transforment les composantes d'un vecteur libre. Si donc, dans un premier

système fondamental $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, un polynome possède une expression homogène en fonction des composantes x, y, z de **V**, dans un autre système $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ son expression en x', y', z' sera encore homogène et du même degré.

Soit $\varpi_1(\mathbf{V})$ un polynome homogène et du premier degré. En appelant α et β deux quantités scalaires quelconques, nous aurons manifestement

$$\varpi_1(\alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{V}) = \alpha\varpi_1(\mathbf{U}) + \beta\varpi_1(\mathbf{V}), \tag{7}$$

le signe $+$ correspondant, dans le premier membre, à une addition géométrique, et, dans le second, à une addition ordinaire.

La proposition traduite par l'identité (7) est susceptible de réciproque. En effet, supposons qu'une fonction ϖ_1 d'un vecteur **V** satisfasse à cette identité. Exprimons **V** sous la forme

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}.$$

De (7), nous déduirons

$$\begin{aligned}\varpi_1(\mathbf{V}) &= \varpi_1(x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}),\\ &= \varpi_1(x\mathcal{A} + y\mathcal{B}) + \varpi_1(z\mathcal{C}),\\ &= x\varpi_1(\mathcal{A}) + y\varpi_1(\mathcal{B}) + z\varpi_1(\mathcal{C}).\end{aligned}$$

Les coefficients de x, y, z dans cette dernière expression sont des constantes. Le théorème est donc établi.

V

Fonctions scalaires de plusieurs vecteurs : volume du parallélépipède.

23. Fonctions scalaires de plusieurs vecteurs libres. — Par une généralisation facile, on peut envisager des fonctions scalaires de deux ou d'un nombre quelconque de vecteurs libres.

Pratiquement, nous nous limiterons à la considération de polynomes homogènes par rapport à chaque vecteur.

Plus particulièrement, soit la fonction scalaire

$$\varphi(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$$

des trois vecteurs **U**, **V**, **W**. Fixons deux de ces vecteurs et faisons varier seulement le vecteur restant : si nous obtenons toujours de cette manière une fonction linéaire du vecteur restant, nous dirons que φ est une fonction *trilinéaire* des trois vecteurs **U**, **V**, **W**. On définirait de même des fonctions *bilinéaires* de deux vecteurs **U** et **V**, et plus généralement des fonctions *p fois linéaires de p vecteurs*.

24. Fonctions symétriques. Fonctions alternées. — On dit qu'une fonction

$$\varphi(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$$

est *symétrique* si on peut, sans changer sa valeur, permuter arbitrairement **U**, **V**, **W**.

On dit qu'elle est *alternée* lorsque la transposition de deux vecteurs, quels qu'ils soient, change le signe de la fonction et non sa valeur absolue.

Considérons toutes les permutations des lettres **U**, **V**, **W** :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{U},\ \mathbf{V},\ \mathbf{W}, & \mathbf{U},\ \mathbf{W},\ \mathbf{V}, \\ \mathbf{V},\ \mathbf{W},\ \mathbf{U}, & \mathbf{V},\ \mathbf{U},\ \mathbf{W}, \\ \mathbf{W},\ \mathbf{U},\ \mathbf{V}, & \mathbf{W},\ \mathbf{V},\ \mathbf{U}. \end{array}$$

Celles qui sont écrites dans la colonne de gauche se déduisent de **U**, **V**, **W** par un nombre pair de transpositions (il est bien entendu qu'on nomme transposition l'opération qui consiste à échanger deux vecteurs). Par contre, celles qui sont écrites dans la colonne de droite contiennent un nombre impair de transpositions.

On dit que les premières sont des permutations de classe *paire*, et que les secondes sont des permutations de classe *impaire*.

Il résulte immédiatement de la définition des fonctions alternées que l'on a

$$\begin{aligned} &\varphi(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) = \varphi(\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{U}) = \varphi(\mathbf{W}, \mathbf{U}, \mathbf{V}) \\ &= -\varphi(\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{V}) = -\varphi(\mathbf{V}, \mathbf{U}, \mathbf{W}) = -\varphi(\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{U}). \end{aligned}$$

Le volume d'un parallélépipède va nous fournir un exemple remarquable de fonction trilinéaire et alternée de trois vecteurs libres.

25. Volume d'un parallélépipède. — Nous nous proposons de définir et d'étudier le volume d'un parallélépipède, en tant que fonction scalaire des trois vecteurs libres obtenus en prenant les grandeurs vectorielles des trois arêtes issues d'un même sommet.

Ce problème une fois résolu, on étendrait la notion de volume à des domaines quelconques (ou tout au moins très généraux) en faisant appel au processus classique du calcul intégral.

Par volume d'un domaine, nous entendons un nombre qui satisfait aux conditions suivantes, que nous compléterons par la suite :

CONDITION I. — Si un domaine D est décomposé en deux domaines partiels D_1 et D_2 (sans partie commune et épuisant par leur réunion l'ensemble des points de D), le volume de D est la somme des volumes de D_1 et de D_2.

CONDITION II. — Deux domaines déduits l'un de l'autre par translation ont même volume.

CONDITION III. — Le volume du parallélépipède construit sur OA, OB, OC est une fonction continue de leurs grandeurs vectorielles.

Ces conditions posées, représentons par la notation

$$(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC})$$

le volume à définir. Considérons le symbole

$$(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC} + \lambda \mathbf{OA}).$$

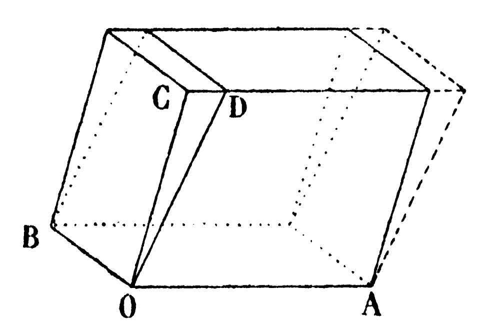
Il devra donner le volume d'un parallélépipède, construit sur **OA**, **OB**, **OD**, le point D étant tel que

$$\mathbf{CD} = \lambda \mathbf{OA}.$$

Or, d'après la condition II, il est nécessaire que l'on ait

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}) = (\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OD}).$$

En effet, on passe du premier volume au second en ajoutant et retranchant à ce premier volume ceux de deux prismes triangulaires, qui se déduisent l'un de l'autre par une translation égale à **OA**.



Plus généralement, nous devrons donc avoir, quelles que soient les quantités scalaires λ et μ,

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC} + \lambda \mathbf{OA} + \mu \mathbf{OB}) = (\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}).$$

En résumé, ce que nous sommes convenus d'appeler volume ne changera pas si l'on modifie la direction de l'arête OC, en laissant le point C arbitraire dans un plan parallèle à OAB.

Remarquons que les modifications ainsi permises de l'arête OC n'altéreront jamais l'orientation du trièdre OABC.

26. Sans modifier le volume, la remarque précédente nous permet d'attribuer aux arêtes des directions quelconques. Voyons donc s'il est possible de définir, conformément à ce qui précède, le rapport des volumes de deux parallélépipèdes ayant leurs arêtes parallèles.

Supposons donc que l'on ait

$$\mathbf{O'A'} = \lambda \mathbf{OA}, \qquad \mathbf{O'B'} = \mu \mathbf{OB}, \qquad \mathbf{O'C'} = \nu \mathbf{OC},$$

et plaçons-nous d'abord dans le cas où les scalaires λ, μ, ν sont rationnels et positifs. Il y a alors possibilité de reconstituer les deux parallélépipèdes considérés par la juxtaposition d'un nombre entier de parallélépipèdes, déductibles par translation de l'un deux. Dans ce cas, on trouve immédiatement

$$(\mathbf{O'A'}, \mathbf{O'B'}, \mathbf{O'C'}) = \lambda\mu\nu(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}),$$

et cela, en vertu des conditions I et II. Par la condition III, on étend aisément cette relation à toutes les valeurs positives de λ, μ, ν.

Mais alors, pour la commodité des calculs, il est naturel d'introduire des conventions de signe telles que la relation (8) devienne générale. C'est à cette hypothèse supplémentaire que nous avons fait allusion en commençant. Nous l'introduirons systématiquement sous le nom de Condition IV.

27. Linéarité du volume par rapport à chacun des vecteurs. — Nous allons montrer que s'il existe une quantité scalaire

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}),$$

répondant aux conditions I, II, III et IV, elle est forcément une fonction linéaire de chacune des grandeurs vectorielles **OA**, **OB**, **OC**.

En effet, montrons d'abord que l'égalité vectorielle

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OC}' + \mathbf{OC}''$$

doit entraîner l'égalité scalaire

$$(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}) = (\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}') + (\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}'').$$

Les trois volumes mis en jeu dans cette dernière sont ceux de parallélépipèdes ayant une face commune. Les directions des arêtes OC, OC', OC'' sont distinctes en général, mais on peut substituer aux points C, C', C'' d'autres points C_1, C'_1, C''_1 alignés avec le point O, sans altérer les volumes correspondants. Il suffit pour cela, utilisant la remarque du n° 25, de prendre pour C_1, C'_1, C''_1 les projections, faites parallèlement au plan OAB, de C, C', C'' sur un même axe Oz. Le théorème devient alors évident : faisons seulement remarquer qu'à ce point précis de la démonstration, la condition IV joue un rôle important.

Plus généralement, on démontrerait que l'égalité vectorielle

$$\mathbf{OC} = \lambda'\mathbf{OC}' + \lambda''\mathbf{OC}''$$

entraîne l'égalité scalaire

$$(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}) = \lambda'(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}') + \lambda''(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}'').$$

C'est là d'ailleurs uniquement une conséquence de la relation générale (8) et du théorème précédent.

Mais alors, d'après ce que nous avons vu au n° 22, le symbole

$$(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC})$$

sera une fonction linéaire de **OC** lorsqu'on laissera **OA** et **OB** fixes.

En définitive,

$$(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC})$$

sera donc une fonction trilinéaire de **OA**, **OB**, **OC**.

28. Alternance du volume. — Nous allons montrer maintenant, en nous servant de la remarque du n° 25 et de la condition IV, que le volume est une fonction alternée de **OA**, **OB**, **OC**.

La remarque du n° 25 nous permet en effet d'écrire

$$\begin{aligned}(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}) &= (\mathbf{OA},\ \mathbf{OB}+\mathbf{OC},\ \mathbf{OC})\\ &= (\mathbf{OA},\ \mathbf{OB}+\mathbf{OC},\ -\mathbf{OB})\\ &= (\mathbf{OA},\ \mathbf{OC},\ -\mathbf{OB}).\end{aligned}$$

D'après la condition IV, cette dernière expression peut justement s'écrire

$$-(\mathbf{OA},\ \mathbf{OC},\ \mathbf{OB}). \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

29. Expression définitive du volume. — En résumé, s'il existe une quantité scalaire

$$(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC})$$

satisfaisant aux conditions I, II, III et IV, cette quantité doit être une fonction *trilinéaire* et *alternée* de **OA, OB, OC**.

Nous allons démontrer que ces deux dernières conditions la déterminent à un facteur constant près. La présence d'un tel facteur était d'ailleurs *a priori* indispensable : en effet, il est clair qu'on ne peut évaluer que le rapport de deux volumes.

Pour établir le résultat qui vient d'être énoncé, nous aurons recours à ce lemme.

LEMME. — *Considérons une forme trilinéaire des trois séries de variables*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,$$

c'est-à-dire une somme de termes tels que

$$\lambda_{ijk}a_ib_jc_k,$$

où les indices i, j, k, peuvent recevoir, de toutes les manières possibles, l'une quelconque des valeurs 1, 2, 3. *En échangeant les deux séries de variables*

$$b_1,\ b_2,\ b_3,$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,$$

on obtiendra une nouvelle forme, de terme général

$$\mu_{ijk}a_ib_jc_k.$$

Les coefficients λ *et* μ *des termes semblables seront liés par les relations*

$$\mu_{ijk} = \lambda_{ikj}.$$

En effet, du terme

$$\lambda_{ijk}a_ib_jc_k,$$

la transposition des b et des c nous amène au terme

$$\lambda_{ijk}a_ib_kc_j.$$

Pour réaliser la correspondance par termes semblables dans les deux formes, nous devons, dans le dernier monôme, permuter les indices j et k, ce qui donnera bien

$$\lambda_{ikj}a_ib_jc_k. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

On peut dire encore, sous une forme plus condensée :

Il est indifférent d'intervertir deux séries de variables ou les indices de même rang souscrits à λ.

Ce dernier énoncé nous amène tout naturellement à cet autre, plus général :

Il est indifférent de faire subir aux a, b, c *une substitution conduisant à une permutation quelconque de ces lettres, ou de faire subir la même substitution aux indices souscrits à* λ.

30. Cherchons maintenant à exprimer que le volume est une fonction alternée. Nous désignons par

$$(a_1, \ a_2, \ a_3),$$
$$(b_1, \ b_2, \ b_3),$$
$$(c_1, \ c_2, \ c_3)$$

les composantes de **OA**, **OB**, **OC** dans un système fondamental qu'il est inutile d'expliciter.

Lorsque **OA**, **OB**, **OC** sont rangés dans leur ordre naturel, le volume est une certaine forme trilinéaire, de terme général

$$\lambda_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Considérons toutes les permutations de **OA**, **OB**, **OC**. Ce sont

OA, **OB**, **OC**,	et	**OA**, **OC**, **OB**,
OB, **OC**, **OA**,		**OB**, **OA**, **OC**,
OC, **OA**, **OB**,		**OC**, **OB**, **OA**.

Les valeurs correspondantes du volume seront des formes ayant respectivement pour terme général

$$\begin{array}{lcl} \lambda_{ijk} a_i b_j c_k, & \text{et} & \lambda_{ikj} a_i b_j c_k, \\ \lambda_{jki} a_i b_j c_k, & & \lambda_{jik} a_i b_j c_k, \\ \lambda_{kij} a_i b_j c_k, & & \lambda_{kji} a_i b_j c_k. \end{array}$$

La propriété d'alternance équivaut à l'ensemble des conditions

$$\lambda_{ijk} = \lambda_{jki} = \lambda_{kij} = -\lambda_{ikj} = -\lambda_{jik} = -\lambda_{kji},$$

qui expriment que les coefficients λ sont eux-mêmes fonctions alternées de la disposition des indices i, j et k.

De là, il résulte d'abord que l'égalité de deux indices entraîne l'annulation du coefficient λ correspondant. En effet, on peut écrire par exemple

$$\lambda_{113} = -\lambda_{113},$$

d'où

$$\lambda_{113} = 0.$$

On devra donc donner à i, j, k des valeurs distinctes, formant dans leur ensemble une permutation des nombres 1, 2, 3. En définitive, les conditions précédentes pourront s'écrire

$$\lambda_{123} = \lambda_{231} = \lambda_{312} = -\lambda_{132} = -\lambda_{213} = -\lambda_{321}.$$

Il ne subsistera donc dans l'expression de la forme qu'un seul coefficient indéterminé λ_{123}. La quantité entre parenthèses pourra se déduire du tableau carré

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3, \end{array}$$

en écrivant tous les produits formés en prenant un terme et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne, tels que

$$a_i b_j c_k,$$

en faisant précéder tous ces produits du signe + ou du signe —, suivant que la permutation (i, j, k) des indices (1, 2, 3) est paire ou impaire, et en sommant tous les monômes ainsi obtenus.

De telles expressions sont étudiées systématiquement en algèbre, sous le nom de DÉTERMINANTS. Remarquons que les considérations précédentes nous amènent logiquement à la définition (un peu complexe) de ce mécanisme de calcul, d'une importance fondamentale. Cette importance, comme nous le montrerons plus loin, provient de la possibilité d'écrire à l'aide de déterminants, la solution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues.

31. Convenons de représenter par le symbolisme

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

la valeur du déterminant précédent. Le volume cherché aura une expression de la forme

$$(\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}) = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

où λ désigne un coefficient indéterminé.

Pour trouver la signification de ce coefficient, mettons maintenant en évidence le système fondamental $\mathbf{OA}_0$, $\mathbf{OB}_0$, $\mathbf{OC}_0$ dans lequel les composantes de $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$, $\mathbf{OC}$ sont précisément

$$(a_1,\ a_2,\ a_3),$$
$$(b_1,\ b_2,\ b_3),$$
$$(c_1,\ c_2,\ c_3).$$

Dans ce système $\mathbf{OA}_0$ a lui-même pour composantes (1, 0, 0),
— $\mathbf{OB}_0$ — — (0, 1, 0),
— $\mathbf{OC}_0$ — — (0, 0, 1).

Nous pouvons donc écrire

$$(\mathbf{OA}_0,\ \mathbf{OB}_0,\ \mathbf{OC}_0) = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda.$$

Par suite, nous aurons

$$(9) \qquad (\mathbf{OA},\ \mathbf{OB},\ \mathbf{OC}) = (\mathbf{OA}_0,\ \mathbf{OB}_0,\ \mathbf{OC}_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Le problème du calcul du volume d'un parallélépipède est donc entièrement résolu.

32. Signification du signe du volume. — Le système fondamental OA_0, OB_0, OC_0 restant fixe, supposons qu'on fasse varier d'une manière continue les vecteurs OA, OB, OC. Alors

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC})$$

variera d'une manière continue et ne s'annulera que si l'un des trois vecteurs vient à traverser le plan des deux autres, par suite, si on évite cette dernière circonstance, l'expression

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}),$$

ainsi que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

conservent un signe invariable. On peut encore dire :

Si l'on conserve, au cours de la variation précédente, l'orientation du trièdre OABC, le signe du volume (**OA**, **OB**, **OC**) et celui du déterminant correspondant demeurent invariables.

On en déduit également le résultat suivant :

Le déterminant précédent est positif ou négatif suivant que le trièdre OABC et le trièdre $OA_0B_0C_0$ sont de même sens ou de sens contraires [1].

VI

Déterminants. Équations du premier degré.

33. Construction d'une Géométrie à n dimensions. — Jusqu'à présent, nous avons raisonné en supposant que l'espace possède trois dimensions. Nous avons dû faire appel à cette hypothèse, au n° 14, lorsque nous avons examiné la possibilité d'exprimer un vecteur quelconque à l'aide du nombre minimum de vecteurs fondamentaux.

En restant dans le domaine de la Géométrie abstraite, nous pouvons parfaitement susbtituer à cette hypothèse une autre plus générale, et admettre que le nombre des dimensions de l'espace est un entier quelconque n. Tout vecteur pourra dès lors s'exprimer au moyen de n vecteurs fondamentaux : en disant que ces vecteurs forment *un système fondamental* nous leur imposons des restrictions qui généralisent celle que nous avons faite dans le cas de $n = 3$ et en spécifiant qu'on

(1) Ces raisonnements sont bien connus, et il n'y a pas lieu d'insister davantage. Voir, par exemple, mon *Cours de Géométrie analytique*, n° 29.

choisit trois vecteurs non situés dans un même plan. Pour préciser ces restrictions en toute généralité, nous définirons d'abord ce qu'il faut entendre par MULTIPLICITÉ LINÉAIRE.

Expliquons la signification de cette nouvelle notion dans le cas de $n = 3$.

Il y a alors deux espèces de multiplicités linéaires :

1° La droite, constituée par une famille de points à un paramètre.

2° Le plan, constitué par une famille de points à deux paramètres.

On dit encore, et cela se comprend de soi-même, que la droite est une *multiplicité linéaire d'ordre un*, et le plan *une multiplicité linéaire d'ordre deux.*

Dans l'espace à n dimensions, nous rencontrerons pareillement divers types de multiplicités linéaires, caractérisés par les ordres $1, 2, \ldots, n-1$.

Pour définir une multiplicité linéaire d'ordre $p \leqslant n-1$, il suffit de se donner $p+1$ points $O, A_1, A_2, \ldots, A_p$ non situés dans une multiplicité linéaire d'ordre inférieur. Cette multiplicité sera alors le lieu de tous les points M définis par l'égalité vectorielle

$$\mathbf{OM} = \lambda_1 \mathbf{OA}_1 + \lambda_2 \mathbf{OA}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbf{OA}_p, \qquad (10)$$

qui fournit la généralisation naturelle de certains modes de définition, déjà rencontrés, de la droite et du plan (cf. n° 19).

Grâce à cette définition, nous pouvons maintenant donner cet énoncé précis :

Dans l'espace à n dimensions, tout vecteur libre peut s'exprimer à l'aide de n vecteurs fondamentaux, non parallèles à une même multiplicité linéaire de cet espace.

La théorie du changement de coordonnées et la notion de fonction d'un ou de plusieurs vecteurs libres s'étendent d'elles-mêmes à cette nouvelle géométrie. On peut en dire autant de la notion de fonction p fois linéaire de p vecteurs libres.

Voici sous quelle forme on peut généraliser la notion du parallélépipède. Dans le cas de $n = 3$, le parallélépipède est formé par l'ensemble des points M tels que

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC},$$

les nombres x, y, z pouvant prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 1. Cette définition s'étend d'elle-même au cas de n quelconque.

Nous obtiendrons, dans l'espace à n dimensions, toutes les généralisations possibles de ce que sont le parallélépipède, le parallélogramme et le segment de droite dans l'espace à trois, en donnant à p toutes les valeurs entières de 1 à n, et aux coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tous les systèmes de valeurs comprises entre 0 et 1. Nous engloberons ces diverses figures dans la désignation générale de PARALLÉLOÏDES.

Suivant le nombre de dimensions d'une telle figure, nous dirons qu'elle appartient à l'un des ordres $1, 2, \ldots, n$. Le paralléloïde d'ordre n sera ainsi, pour l'espace à n dimensions, la généralisation du parallélépipède pour l'espace à trois.

Nous allons nous occuper de généraliser à cette nouvelle figure la notion de volume. Toutefois, pour employer un langage systématique, nous aurons recours désormais à la locution *étendue d'ordre n*. Nous allons maintenant définir la notion à laquelle elle s'applique.

34. Étendue d'un paralléloïde d'ordre n. — Nous voici donc en géométrie à n dimensions. Nous y avons peuplé l'espace de multiplicités linéaires $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n-1}$ à $1, \ldots, n-1$ dimensions. Chacune de ces multiplicités aura sa géométrie propre, c'est-à-dire exprimable sans intervention des points de l'espace extérieurs à cette multiplicité : par exemple, dans le cas de $n=3$, on peut développer la géométrie d'un plan indépendamment de celle de l'espace entier, et la géométrie d'une droite indépendamment de celle de l'espace entier. Dans ce même cas ($n=3$), on peut comparer mutuellement :

1° deux longueurs d'une même droite (ou de droites parallèles);

2° deux aires d'un même plan (ou de plans parallèles) (1);

3° deux volumes.

D'une manière générale, nous chercherons donc, lorsqu'il y a n dimensions, à comparer deux *étendues* d'une même multiplicité linéaire d'ordre au plus égal à $n-1$, ou deux étendues d'ordre n. Les étendues que nous envisageons dans une multiplicité linéaire d'ordre p sont elles-mêmes de l'ordre p, bien entendu.

Il semble donc que nous ayons à résoudre n problèmes distincts :

Comparaison des étendues (d'ordre 1) de deux paralléloïdes (d'ordre 1), dans une multiplicité $\mathcal{M}_1$;

Comparaison des étendues (d'ordre 2) de deux paralléloïdes (d'ordre 2), dans une multiplicité $\mathcal{M}_2$, etc ...;

. . . .

Comparaison des étendues (d'ordre $n-1$) de deux paralléloïdes (d'ordre $n-1$) dans une multiplicité $\mathcal{M}_{n-1}$;

Comparaison de deux étendues d'ordre n dans l'espace.

La distinction entre ces problèmes est purement apparente, grâce au fait que chaque multiplicité linéaire, telle que $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, ..., $\mathcal{M}_{n-1}$, peut être regardée comme un espace autonome. Il suffit donc de définir l'étendue d'ordre n d'un paralléloïde de l'espace à n dimensions.

35. La notion de l'étendue d'un paralléloïde d'ordre n, dans l'espace à n dimensions, se construit exactement comme celle du volume d'un parallélépipède dans l'espace à trois. Ses propriétés caractéristiques sont toujours :

1° l'addition par juxtaposition (condition I);

2° la conservation par translation (condition II);

3° la continuité (condition III).

Des deux premières, on conclut encore à la possibilité de faire varier arbitrairement la direction d'une arête (2), pourvu que son extrémité décrive une multiplicité $\mathcal{M}_{n-1}$ parallèle à celle que déterminent les $(n-1)$ autres arêtes.

(1) Il suffit de reprendre le raisonnement de la section V en géométrie plane.

(2) Une *arête* signifie ici : une portion de multiplicité $\mathcal{M}_1$.

Il est alors possible de se ramener à la comparaison des étendues de deux paralléloïdes, dont les arêtes sont deux à deux parallèles. Soient les deux paralléloïdes construits sur les vecteurs

$$\begin{gathered} OA_1, \ OA_2, \ \ldots, \ OA_n, \\ OA'_1, \ OA'_2, \ \ldots, \ OA'_n, \end{gathered}$$

tels que

$$\mathbf{OA}'_1 = \lambda_1 \mathbf{OA}_1, \ldots, \mathbf{OA}'_n = \lambda_n \mathbf{OA}_n.$$

En conservant toujours le même symbolisme que précédemment, nous aurons encore une relation

$$(12) \qquad (\mathbf{OA}'_1, \ \mathbf{OA}'_2, \ \ldots, \ \mathbf{OA}'_n) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n (\mathbf{OA}_1, \ \mathbf{OA}_2, \ \ldots, \ \mathbf{OA}_n),$$

qui est la généralisation immédiate de la relation (8). Les conditions I, II, III n'établissent la relation (12) que pour les valeurs positives de $\lambda_1 \ldots \lambda_n$. On introduit encore une nouvelle condition (IV) consistant dans la généralité de la relation (12).

On démontre comme précédemment la linéarité de l'étendue par rapport à chacun des vecteurs.

En outre, l'étendue ainsi définie sera encore une fonction alternée. Sans toucher aux autres vecteurs, intervertissons deux vecteurs $\mathbf{OA}_p$ et $\mathbf{OA}_q$. Le signe de l'étendue sera modifié, sans altération de sa valeur absolue.

En effet, à l'intérieur d'une parenthèse, nous avons le droit d'opérer sur $\mathbf{OA}_p$ et $\mathbf{OA}_q$ les transformations successives suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{OA}_p, & \mathbf{OA}_q, \\ \mathbf{OA}_p + \mathbf{OA}_q, & \mathbf{OA}_q, \\ \mathbf{OA}_p + \mathbf{OA}_q, & -\mathbf{OA}_p, \\ \mathbf{OA}_q, & -\mathbf{OA}_p, \end{array}$$

qui sont permises, d'après la remarque faite tout au début du raisonnement. La relation (12) entraîne alors la conclusion annoncée.

En résumé, l'étendue sera une fonction n fois linéaire et alternée des n vecteurs $\mathbf{OA}_1, \mathbf{OA}_2, \ldots, \mathbf{OA}_n$. Cette double propriété la détermine encore à un facteur de proportionnalité près. La démonstration ne diffère en rien de celle que nous avons donnée précédemment.

Prenons un système fondamental quelconque $\mathbf{OJ}_1, \mathbf{OJ}_2, \ldots, \mathbf{OJ}_n$, (la locution système fondamental implique que les vecteurs $\mathbf{OJ}_1, \ldots, \mathbf{OJ}_n$ ne sont pas dans une même multiplicité linéaire d'ordre $< n$). Exprimons $\mathbf{OA}_1, \ldots, \mathbf{OA}_n$ au moyen de ces vecteurs. Nous devons introduire ici deux indices. Convenons que le vecteur $\mathbf{OA}$ peut s'écrire

$$\mathbf{OA} = a^1 \mathbf{OJ}_1 + a^2 \mathbf{OJ}_2 + \ldots + a^n \mathbf{OJ}_n,$$

il sera naturel d'écrire

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{OA}_1 = a_1^1\mathbf{OJ}_1 + a_1^2\mathbf{OJ}_2 + \ldots + a_1^n\mathbf{OJ}_n, \\ \mathbf{OA}_2 = a_2^1\mathbf{OJ}_1 + a_2^2\mathbf{OJ}_2 + \ldots + a_2^n\mathbf{OJ}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{OA}_n = a_n^1\mathbf{OJ}_1 + a_n^2\mathbf{OJ}_2 + \ldots + a_n^n\mathbf{OJ}_n. \end{array}\right.$$

L'étendue s'exprimera par une forme n fois linéaire alternée de terme général

$$\lambda_{k_1k_2\ldots k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}.$$

L'échange de deux séries de variables fournira une forme analogue. Pour faire correspondre ces formes par termes semblables, il faudra faire subir au coefficient du terme général de la première forme le changement qui résulte de la transposition des deux indices ayant même rang que les deux séries de variables considérées.

On arrive toujours à la même conclusion : les λ sont des fonctions alternées de la disposition des indices; il ne peut y avoir égalité de deux indices sans l'annulation du λ correspondant. On sera donc amené à écrire

$$(\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}_n) = \lambda \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix},$$

λ désignant un coefficient arbitraire, et le second facteur se calculant suivant la règle que voici :

On forme tous les produits

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}$$

obtenus en prenant un terme et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Ceci revient à dire qu'il y a autant de ces produits que de permutations

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$$

des entiers

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Puis on fait précéder du signe + ceux qui proviennent d'une permutation de classe paire, et du signe — ceux qui proviennent d'une permutation de classe impaire, et on ajoute tous les monômes ainsi formés.

Le mécanisme de calcul auquel nous sommes ainsi conduits, d'une manière naturelle, s'appelle un DÉTERMINANT d'ordre n.

Il est maintenant facile de préciser la signification du coefficient λ dans le calcul

précédent. En reproduisant un raisonnement déjà fait, nous pouvons écrire en effe

$$(\mathbf{OJ}_1,\ \mathbf{OJ}_2,\ \ldots,\ \mathbf{OJ}_n) = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Il suffit de comparer cette égalité à la précédente pour en déduire

$$(14)\quad (\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}_n) = (\mathbf{OJ}_1,\ \mathbf{OJ}_2,\ \ldots,\ \mathbf{OJ}_n) \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

36. Condition pour qu'un déterminant soit nul. — Des conditions qui nous ont fourni la définition de la notion d'étendue, nous pouvons déduire le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si* $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OA}_2$, ..., $\mathbf{OA}_n$ *appartiennent à une multiplicité linéaire d'ordre* $< n$, *on a*

$$(\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}_n) = 0.$$

L'hypothèse de cet énoncé est très générale et ne spécifie pas l'ordre de la multiplicité linéaire, qui peut être l'un des nombres $1, 2, \ldots, n-1$.

Supposons, pour fixer les idées, que $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OA}_2$, ..., $\mathbf{OA}_n$ appartiennent à une multiplicité linéaire d'ordre $n-2$, mais qu'il y ait au moins $n-2$ de ces vecteurs qui n'appartiennent à aucune multiplicité d'ordre $< n-2$. En disposant des notations, nous pouvons toujours supposer que ces vecteurs sont précisément

$$\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}_{n-2},$$

de sorte que nous pourrons écrire

$$\mathbf{OA}_{n-1} = \lambda_1\mathbf{OA}_1 + \lambda_2\mathbf{OA}_2 + \ldots + \lambda_{n-2}\mathbf{OA}_{n-2},$$
$$\mathbf{OA}_n = \mu_1\mathbf{OA}_1 + \mu_2\mathbf{OA}_2 + \ldots + \mu_{n-2}\mathbf{OA}_{n-2}.$$

Dès lors, nous aurons, en vertu de la linéarité de l'étendue,

$$(\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}_{n-1},\ \mathbf{OA}_n) = \mu_1(\mathbf{OA}_1,\ \ldots,\ \mathbf{OA}_{n-1},\ \mathbf{OA}_1)$$
$$+ \ldots + \mu_{n-2}(\mathbf{OA}_1,\ \ldots,\ \mathbf{OA}_{n-1},\ \mathbf{OA}_{n-2}).$$

Or; dans le second membre, chaque parenthèse porte sur n vecteurs qui ne sont pas deux à deux distincts. Toutes ces parenthèses sont donc nulles, d'après la définition des fonctions alternées.

Ce raisonnement est général et peut être répété pour une multiplicité quelconque de l'un des ordres, $1, 2, \ldots, n-1$. (C. Q. F. D.)

THÉORÈME CONTRAIRE. — *S'il n'existe aucune multiplicité linéaire d'ordre inférieur à n contenant à la fois*

$$OA_1,\ OA_2,\ \dots,\ OA_n,$$

on a

$$(\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \dots,\ \mathbf{OA}_n) \neq 0.$$

En effet, supposons un instant que l'on ait, pour un choix bien déterminé des vecteurs $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ répondant à l'hypothèse,

$$(\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \dots,\ \mathbf{OA}_n) = 0.$$

De cette étendue d'ordre n qui est nulle, nous pouvons en déduire une infinité d'autres jouissant de la même propriété. Ainsi que nous l'avons expliqué au n° 35, nous pouvons, sans altérer l'étendue d'un paralléloïde, faire varier à loisir la direction de ses arêtes. En nous appuyant sur cette possibilité et sur la relation (12), nous serions ainsi amenés à assigner une étendue nulle à tout paralléloïde d'ordre n. Or la définition même de l'étendue postule l'existence d'au moins une figure d'étendue non nulle. La proposition est donc établie.

37. Nous pouvons maintenant englober les deux théorèmes précédents dans l'énoncé général que voici :

Pour que l'on ait, dans l'espace à n dimensions (ou dans une multiplicité $\mathfrak{M}_n$)

$$(\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \dots,\ \mathbf{OA}_n) \neq 0,$$

il faut et il suffit que $\mathbf{OA}_1, \mathbf{OA}_2, \dots, \mathbf{OA}_n$ *forment un système fondamental*, c'est-à-dire qu'il n'existe entre ces vecteurs aucune relation telle que

$$\lambda_1\mathbf{OA}_1 + \lambda_2\mathbf{OA}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{OA}_n = 0$$

à coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls.

Ceci étant acquis, considérons l'égalité (14). Il est bien entendu que les vecteurs

$$\mathbf{OJ}_1,\ \dots,\ \mathbf{OJ}_n$$

qui interviennent dans cette égalité forment un système fondamental. L'on a donc

$$(\mathbf{OJ}_1,\ \mathbf{OJ}_2,\ \dots,\ \mathbf{OJ}_n) \neq 0.$$

Il y a par suite équivalence entre les conditions

$$(\mathbf{OA}_1,\ \mathbf{OA}_2,\ \dots,\ \mathbf{OA}_n) = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Mais il y a aussi équivalence entre la première et l'existence de coefficients $\lambda_1 \dots \lambda_p$ non tous nuls, tels qu'on ait

$$\lambda_1\mathbf{OA}_1 + \lambda_2\mathbf{OA}_2 + \dots + \lambda_p\mathbf{OA}_p = 0,$$

ou encore
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 a_1^1 + \lambda_2 a_2^1 + \ldots + \lambda_n a_n^1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_1^n + \lambda_2 a_2^n + \ldots + \lambda_n a_n^n = 0. \end{array}\right.$$

On peut donc énoncer, en rapprochant ces conditions équivalentes, le théorème suivant :

Pour qu'un déterminant soit nul, il faut et il suffit qu'il existe entre les éléments de ses colonnes au moins une relation linéaire à coefficients non tous nuls.

On obtiendrait un énoncé analogue en substituant les lignes aux colonnes, d'après une transformation qui sera légitimée au n° 39.

38. Multiplication de deux déterminants d'ordre n. — La théorie des changements de coordonnées est exactement la même pour $n = 3$ et pour n quelconque. Il est donc inutile de la développer de nouveau. Toutefois, nous allons montrer comment on peut en déduire la règle de multiplication de deux déterminants d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Supposons que l'on considère n vecteurs libres

$$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_n$$

et que leurs composantes dans le système fondamental $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OA}_2$, ..., $\mathbf{OA}_n$ soient fournies par les relations

$$\begin{array}{l} \mathbf{V}_1 = \alpha_1^1 \mathbf{OA}_1 + \alpha_1^2 \mathbf{OA}_2 + \ldots + \alpha_1^n \mathbf{OA}_n, \\ \mathbf{V}_2 = \alpha_2^1 \mathbf{OA}_1 + \alpha_2^2 \mathbf{OA}_2 + \ldots + \alpha_2^n \mathbf{OA}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{V}_n = \alpha_n^1 \mathbf{OA}_1 + \alpha_n^2 \mathbf{OA}_2 + \ldots + \alpha_n^n \mathbf{OA}_n. \end{array}$$

Supposons de plus qu'on ait toujours

$$\begin{array}{l} \mathbf{OA}_1 = a_1^1 \mathbf{OJ}_1 + a_1^2 \mathbf{OJ}_2 + \ldots + a_1^n \mathbf{OJ}_n, \\ \mathbf{OA}_2 = a_2^1 \mathbf{OJ}_1 + a_2^2 \mathbf{OJ}_2 + \ldots + a_2^n \mathbf{OJ}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{OA}_n = a_n^1 \mathbf{OJ}_1 + a_n^2 \mathbf{OJ}_2 + \ldots + a_n^n \mathbf{OJ}_n. \end{array}$$

Si l'on rapporte $\mathbf{V}_1$, ..., $\mathbf{V}_n$, au système fondamental $\mathbf{OJ}_1$, ..., $\mathbf{OJ}_n$, on obtiendra

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{V}_1 = (a_1^1 \alpha_1^1 + a_2^1 \alpha_1^2 + \ldots + a_n^1 \alpha_1^n) \mathbf{OJ}_1 + \ldots + (a_1^n \alpha_1^1 + a_2^n \alpha_1^2 + \ldots + a_n^n \alpha_1^n) \mathbf{OJ}_n, \\ \mathbf{V}_2 = (a_1^1 \alpha_2^1 + a_2^1 \alpha_2^2 + \ldots + a_n^1 \alpha_2^n) \mathbf{OJ}_1 + \ldots + (a_1^n \alpha_2^1 + a_2^n \alpha_2^2 + \ldots + a_n^n \alpha_2^n) \mathbf{OJ}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{V}_n = (a_1^1 \alpha_n^1 + a_2^1 \alpha_n^2 + \ldots + a_n^1 \alpha_n^n) \mathbf{OJ}_1 + \ldots + (a_1^n \alpha_n^1 + a_2^n \alpha_n^2 + \ldots + a_n^n \alpha_n^n) \mathbf{OJ}_n. \end{array}\right.$$

Or, en vertu de (14), nous pouvons écrire

$$(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n) = (\mathbf{OA}_1, \mathbf{OA}_2, \dots, \mathbf{OA}_n).\Delta,$$
$$(\mathbf{OA}_1, \mathbf{OA}_2, \dots, \mathbf{OA}_n) = (\mathbf{OJ}_1, \mathbf{OJ}_2, \dots, \mathbf{OJ}_n).\mathrm{D}.$$

En multipliant membre à membre ces deux égalités, nous obtiendrons

$$(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n) = (\mathbf{OJ}_1, \mathbf{OJ}_2, \dots, \mathbf{OJ}_n).\mathrm{D}\Delta.$$

Or, des équations qui donnent les composantes de $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ dans le système fondamental $\mathbf{OJ}_1, \dots, \mathbf{OJ}_n$, nous déduisons aussi, en vertu de (14),

$$(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n) = (\mathbf{OJ}_1, \mathbf{OJ}_2, \dots, \mathbf{OJ}_n)\mathfrak{D},$$

en posant

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} a_1^1\alpha_1^1 + a_2^1\alpha_1^2 + \dots + a_n^1\alpha_1^n, & a_1^2\alpha_1^1 + a_2^2\alpha_1^2 + \dots + a_n^2\alpha_1^n, & \dots & a_1^n\alpha_1^1 + a_2^n\alpha_1^2 + \dots + a_n^n\alpha_1^n \\ a_1^1\alpha_2^1 + a_2^1\alpha_2^2 + \dots + a_n^1\alpha_2^n, & a_1^2\alpha_2^1 + a_2^2\alpha_2^2 + \dots + a_n^2\alpha_2^n, & \dots & a_1^n\alpha_2^1 + a_2^n\alpha_2^2 + \dots + a_n^n\alpha_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^1\alpha_n^1 + a_2^1\alpha_n^2 + \dots + a_n^1\alpha_n^n, & a_1^2\alpha_n^1 + a_2^2\alpha_n^2 + \dots + a_n^2\alpha_n^n, & \dots & a_1^n\alpha_n^1 + a_2^n\alpha_n^2 + \dots + a_n^n\alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Le déterminant $\mathfrak{D}$ est donc égal au produit cherché

$$\mathfrak{D} = \mathrm{D}.\Delta.$$

39. Autres propriétés des déterminants. — On peut échanger, dans un déterminant, le rôle des lignes et des colonnes.

Considérons en effet le tableau

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n. \end{matrix}$$

Nous avons défini le déterminant de ce tableau comme une forme n fois linéaire et alternée des n séries de n variables, écrites dans les lignes successives de ce tableau, forme dans laquelle le coefficient du terme

$$a_1^1 \quad a_2^2 \quad \dots \quad a_n^n$$

est égal à l'unité. Nous avons vu que cette expression est une forme n fois linéaire des n séries de variables écrites dans les n colonnes. De plus, elle est alternée. En effet, son terme général est de la forme

$$\varepsilon a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$$

(car nous partons de la formation par lignes), ε désignant $+1$ ou -1 suivant la parité de la permutation

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

des indices $1, 2, \dots n$. Si nous permutons deux colonnes, d'indices α_i et α_k, nous déduirons de la forme précédente une autre forme. Si nous voulons, dans cette forme

écrire le terme semblable à un terme de la première, c'est-à-dire revenir à la même permutation des indices supérieurs, il s'ensuivra que, dans la permutation des indices inférieurs, i et k seront échangés.

La forme est donc bien alternée, et il n'y a aucune différence entre le rôle des lignes et celui des colonnes.

Nous n'avons d'ailleurs fait que répéter ici le raisonnement déjà indiqué au n° 30 et généralisé au n° 35.

40. Développement d'un déterminant suivant les éléments d'une rangée. — Nous commencerons par résoudre cette question préliminaire :

Trouver l'expression générale des formes alternées et p fois linéaires de p séries de variables, comprenant n variables chacune.

Ce problème a été résolu en supposant

$$n = p.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$n > p$$

et raisonnons sur un exemple : prenons

$$p = 3 \qquad \text{et} \qquad n = 5.$$

Cherchons les formes trilinéaires alternées des trois séries de variables :

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5. \end{matrix}$$

Une telle forme admettra un terme général de la forme

$$\lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3}.$$

A cause de la propriété d'alternance, il ne peut y avoir égalité de deux indices. Nous devrons donc considérer tous les arrangements sans répétition α_1, α_2, α_3 des nombres 1, 2, 3, 4, 5 pris trois à trois. Or, pour former le tableau des arrangements, on peut partir du tableau des combinaisons, et faire, dans chaque combinaison, toutes les permutations possibles. Partons donc d'une combinaison déterminée, telle que 2, 3, 5 et considérons le terme

$$\lambda_{235} a_1^2 a_2^3 a_3^5.$$

Groupons ce terme avec ceux qu'on en déduit par permutation des indices 2, 3, 5. Nous obtiendrons une forme trilinéaire alternée de

$$\begin{matrix} a_1^2 & a_1^3 & a_1^5 \\ a_2^2 & a_2^3 & a_2^5 \\ a_3^2 & a_3^3 & a_3^5. \end{matrix}$$

L'ensemble des termes ainsi obtenus sera donc égal à

$$\lambda_{235} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & a_1^5 \\ a_2^2 & a_2^3 & a_2^5 \\ a_3^2 & a_3^3 & a_3^5 \end{vmatrix}.$$

Finalement, la forme cherchée peut donc s'écrire

$$\Sigma \quad \lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \begin{vmatrix} a_1^{\alpha_1} & a_1^{\alpha_2} & a_1^{\alpha_3} \\ a_2^{\alpha_1} & a_2^{\alpha_2} & a_2^{\alpha_3} \\ a_3^{\alpha_1} & a_3^{\alpha_2} & a_3^{\alpha_3} \end{vmatrix},$$

la sommation symbolisée par Σ étant étendue à toutes les combinaisons $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ des indices 1, 2, 3, 4, 5 pris trois à trois.

La généralisation pour n et p quelconques est immédiate. D'ailleurs, la propriété d'alternance exclut l'hypothèse $p > n$, qui, par la présence d'indices égaux, entraînerait l'annulation de tous les coefficients.

41. Du résultat obtenu au numéro précédent et de la définition même du déterminant, on peut tirer des transformations de calcul très utiles pour le calcul pratique des déterminants. La plus importante est celle qui conduit au développement d'un déterminant suivant les éléments d'une ligne. Mais les transformations auxquelles il vient d'être fait allusion ont un degré de généralité beaucoup plus grand, et nous commencerons par en exposer le principe commun sur un exemple.

Soit le déterminant d'ordre 5

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}.$$

Un terme quelconque t de D peut s'écrire sous la forme

$$t = (-1)^i a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4} a_5^{\alpha_5},$$

en désignant par i le nombre des inversions de la permutation,

$$\alpha_1, \qquad \alpha_2, \qquad \alpha_3, \qquad \alpha_4, \qquad \alpha_5,$$

des indices 1, 2, 3, 4, 5.

Supposons un instant qu'on astreigne

$$a_1^{\alpha_1} \qquad \text{et} \qquad a_2^{\alpha_2}$$

à appartenir chacun à l'une des deux premières colonnes : alors

$$a_3^{\alpha_3}, \qquad a_4^{\alpha_4} \qquad \text{et} \qquad a_5^{\alpha_5}$$

appartiendront nécessairement aux trois dernières.

Donc si les deux premiers éléments du terme t appartiennent au carré obtenu en supprimant dans D les trois dernières lignes et les trois dernières colonnes, les trois derniers éléments du même terme appartiendront au carré *complémentaire* dans D, c'est-à-dire à celui qu'on obtient en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes.

Il est bien facile d'ailleurs d'écrire immédiatement l'ensemble des termes de D provenant de ces deux carrés *complémentaires* : cet ensemble est précisément la valeur prise par le déterminant D, lorsqu'on y annule tous les termes qui n'appartiennent ni à l'un ni à l'autre de ces carrés. On obtient ainsi un nouveau déterminant.

$$D' = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ 0 & 0 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ 0 & 0 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$$

D'après le résultat du n° 40, ce nouveau déterminant D′ est une fonction alternée des deux séries de variables écrites dans le carré

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 ; \end{matrix}$$

il est aussi une fonction alternée des trois séries de variables écrites dans le carré complémentaire. Sa valeur est donc de la forme

$$D' = \lambda \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5 \end{vmatrix},$$

λ étant un coefficient indépendant des valeurs attribuées aux divers éléments. Pour le déterminer, considérons les diagonales principales des deux déterminants écrits ci-dessus. Le produit des termes correspondants nous conduit précisément au terme formé par la diagonale principale de D. Par suite, nous aurons $\lambda = 1$.

Plus généralement, si dans un terme de D, on impose aux éléments qui proviennent de deux lignes déterminées (telles 3 et 5) d'appartenir à un système de deux colonnes déterminées (soient 1 et 4), les autres éléments proviendront du carré complémentaire (c'est-à-dire du carré obtenu en supprimant les lignes 3 et 5, et les colonnes 1 et 4). L'ensemble des termes de D satisfaisant à ces conditions se présentera donc encore sous la forme d'un produit de deux déterminants, qu'il faudra faire précéder d'un signe. Pour déterminer ce signe, on prendra dans chacun des deux déterminants obtenus la diagonale principale ; on retombera ainsi sur un terme de D, dont le signe est donné par la définition même : ce signe sera manifestement le signe cherché.

42. Le raisonnement précédent nous amène à une décomposition de D en une somme de termes qui sont chacun le produit d'un déterminant du 2e ordre par un déterminant du 3e. Pour fixer les idées, distinguons dans D les deux premières lignes et les trois dernières.

Le déterminant D est une forme linéaire de tous les déterminants du 3e ordre extraits du tableau des trois dernières lignes (chacun de ces déterminants correspondant à une combinaison trois à trois des indices 1, 2, 3, 4, 5) (résultat du n° 40).

D'autre part, il est également linéaire par rapport aux déterminants du 2e ordre extraits, d'une manière analogue, du tableau des deux premières lignes.

Donc D sera une fonction bilinéaire de ces déterminants d'ordre 3 et de ces déterminants d'ordre 2. Nous avons d'ailleurs montré que dans un monôme déterminé de cette forme, l'association de ces déterminants se fera par carrés complémentaires, et que tous les coefficients seront égaux à ± 1.

En déterminant les signes de chaque monôme comme il vient d'être expliqué, et en représentant, pour abréger, chaque déterminant par sa diagonale principale, nous pouvons donc écrire :

$$
\begin{aligned}
D = & (a_1^1 a_2^2)(a_3^3 a_4^4 a_5^5) - (a_1^1 a_2^3)(a_3^2 a_4^4 a_5^5) \\
& + (a_1^1 a_2^4)(a_3^2 a_4^3 a_5^5) - (a_1^1 a_2^5)(a_3^2 a_4^3 a_5^4) \\
& + (a_1^2 a_2^3)(a_3^1 a_4^4 a_5^5) - (a_1^2 a_2^4)(a_3^1 a_4^3 a_5^5) + (a_1^2 a_2^5)(a_3^1 a_4^3 a_5^4) \\
& - (a_1^3 a_2^4)(a_3^1 a_4^2 a_5^5) + (a_1^3 a_2^5)(a_3^1 a_4^2 a_5^4) \\
& - (a_1^4 a_2^5)(a_3^1 a_4^2 a_5^3).
\end{aligned}
$$

Pour mener à bien le travail ci-dessus, il suffit du reste d'opérer patiemment et méthodiquement, d'écrire toutes les combinaisons de l'indice 1 avec les indices qui le suivent, puis celles de l'indice 2 avec les indices qui le suivent, etc. On forme ainsi à coup sûr tous les déterminants extraits du tableau des deux premières lignes. Grâce à la notation adoptée ici, les indices inférieurs sont rangés dans chaque monôme dans leur ordre naturel. Le signe à prendre devant chaque terme est immédiatement fourni par la parité du nombre des inversions de la permutation des indices supérieurs, puisqu'en supprimant les parenthèses on doit obtenir des termes du déterminant D lui-même.

43. L'application du même principe conduit à l'expression d'un déterminant en fonction linéaire des éléments d'une rangée : elle montre que les coefficients de ces éléments sont, au signe près, les *déterminants mineurs* correspondants, c'est-à-dire ceux que l'on obtient en supprimant la ligne et la colonne qui se croisent sur l'élément considéré. Pour énoncer d'une manière précise la règle fixant les signes à prendre, revenons aux notations générales. Soit un déterminant D, que nous symbolisons comme tout à l'heure en écrivant sa diagonale principale

$$D = (a_1^1 a_1^2 \ \ldots \ a_1^n).$$

Le développement de ce déterminant suivant les éléments de la p^e ligne sera de la forme

$$D = a_p^1 A_p^1 + a_p^2 A_p^2 + \ldots + a_p^n A_p^n,$$

où A_p^1, A_p^2, ..., A_p^n sont respectivement égaux ou opposés aux mineurs

$$\Delta_p^1, \ \Delta_p^2, \ \ldots, \ \Delta_p^n.$$

(Il est bien entendu que Δ_p^q représente ce qui reste de D, lorsque, sans autre transformation, on supprime la p^e ligne et la q^e colonne.)

Pour trouver la relation entre A_p^q et Δ_p^q, remarquons d'abord que l'on a

$$A_1^1 = \Delta_1^1,$$

car le terme en diagonale principale de Δ_1^1, multiplié par a_1^1, reproduit le terme en diagonale principale de D. Pour généraliser, imaginons que a_p^q soit le seul élément non nul de la p^e ligne. On a donc alors

$$D = a_p^q A_p^q. \tag{15}$$

Échangeons successivement la p^e ligne avec chacune des $p-1$ qui la précèdent; et la q^e colonne avec chacune des $q-1$ qui la précèdent. Après ces transformations, la valeur de D a été multipliée par

$$(-1)^{p+q-2} \quad \text{ou} \quad (-1)^{p+q};$$

l'élément a_p^q est venu prendre la première place en haut et à gauche de D, et le mineur qui lui correspond n'a subi aucune modification : c'est toujours Δ_p^q. Nous pouvons donc écrire

$$(-1)^{p+q} D = a_p^q \Delta_p^q. \tag{16}$$

La comparaison des équations (15) et (16) nous donne alors

$$A_p^q = (-1)^{p+q} \Delta_p^q.$$

Il y aura donc alternance dans les signes.

44. Systèmes d'équations du premier degré. — Envisageons d'abord le cas le plus simple, celui où il y a autant d'équations que d'inconnues. Soit donc le système

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = b_1, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = b_n. \end{array}\right. \tag{17}$$

Considérons, dans l'espace à n dimensions, un système fondamental de vecteurs, et soient

$$\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n,\ \mathbf{OB}$$

les vecteurs qui ont pour composantes, dans ce système fondamental, les éléments des colonnes 1, 2, ..., n dans le tableau des coefficients, et les éléments écrits aux seconds membres. Le système (17) équivaut à une égalité vectorielle unique

$$x_1\mathbf{OA}^1 + x_2\mathbf{OA}^2 + \ldots + x_n\mathbf{OA}^n = \mathbf{OB}. \tag{18}$$

La résolution de ce système équivaut à la décomposition de **OB** suivant les droites OA^1, OA^2..., OA^n. Pour que ce problème admette une solution et une seule, il faut et il suffit que $\mathbf{OA}^1$, $\mathbf{OA}^2$, ..., $\mathbf{OA}^n$ forment un système fondamental (n° 33), c'est-à-dire que l'on ait (n° 37)

$$(\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n) \neq 0. \tag{19}$$

Supposons remplie la condition (19). Cherchons, à l'aide de (18), une expression de l'étendue

$$(\mathbf{OB},\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n).$$

Il suffit pour cela de remplacer dans la parenthèse **OB** par le premier membre de l'équation (18). D'après la propriété linéaire, le résultat obtenu pourra se décomposer en une somme de n termes, dont le premier s'écrira

$$x_1(\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n).$$

Tous les autres seront nuls, comme fonctions alternées de n vecteurs non tous distincts. Nous obtenons donc finalement

$$x_1(\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n) = (\mathbf{OB},\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n).$$

En vertu de l'hypothèse (19), on tire de cette équation

$$(20) \qquad x_1 = \frac{(\mathbf{OB},\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n)}{(\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n)}.$$

Désignons un instant par $\mathbf{OJ}^1$, $\mathbf{OJ}^2$, ..., $\mathbf{OJ}^n$ le système fondamental choisi tout à l'heure. En vertu de l'égalité (14), on peut remplacer le numérateur et le dénominateur du second membre par le produit d'un déterminant et de l'étendue ($\mathbf{OJ}^1$, ... $\mathbf{JO}_n$). Cette dernière s'élimine donc du résultat, et nous obtenons définitivement

$$x_1\Delta = \Delta_1,$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ b_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

On pourrait tirer, par un calcul analogue, la valeur des autres inconnues. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, établi pour la première fois par *Cramer :*

Pour qu'un système de n équations du premier degré à n inconnues admette une solution et une seule, il faut et il suffit que le déterminant Δ *des coefficients ne soit pas nul. Chaque inconnue se présente alors comme un quotient ayant pour dénominateur* Δ *et pour numérateur le déterminant déduit de* Δ *par substitution, aux coefficients de l'inconnue cherchée, des termes connus correspondants.*

Si le déterminant Δ est nul, on déduit toujours des équations du système (17) les équations telles que

$$x_1\Delta = \Delta_1.$$

Si, parmi les seconds membres Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n de ces équations, l'un au moins n'est pas nul, le système est impossible. Cela signifie alors qu'il existe une multiplicité linéaire, d'ordre au plus égal à $n-1$, contenant

$$\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^n.$$

En général **OB** n'appartiendra pas à cette multiplicité : ainsi s'explique géométriquement le caractère d'impossibilité mis en évidence algébriquement.

Si par contre **OB** appartient à la multiplicité précédente, il y aura indétermination,

car cette multiplicité sera au plus d'ordre $n-1$: le problème de la décomposition d'un vecteur suivant n droites a ainsi une infinité de solutions.

Nous allons maintenant préciser ces indications : toutefois, pour éviter des redites, nous passerons immédiatement au cas général d'un système de n équations à s inconnues.

45. Systèmes généraux. — Considérons donc maintenant un système quelconque, de n équations à s inconnues :

$$(21) \qquad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^s x_s = b_1, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^s x_s = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^s x \ = b_n. \end{cases}$$

Prenons, dans un espace à n dimensions, un système fondamental

$$\mathbf{OJ}^1, \ \mathbf{OJ}^2, \ \ldots, \ \mathbf{OJ}^n,$$

et soient

$$\mathbf{OA}^1, \ \mathbf{OA}^2, \ \ldots, \ \mathbf{OA}^s, \ \mathbf{OB}$$

les vecteurs qui ont pour composantes respectives les $s+1$ files de nombres écrits dans les colonnes du tableau des coefficients et dans les seconds membres de nos équations. Les n équations (21) équivalent à une seule équation vectorielle

$$(22) \qquad x_1\mathbf{OA}^1 + x_2\mathbf{OA}^2 + \ldots, + x_s\mathbf{OA}^s = \mathbf{OB},$$

et la résolution de ces équations se ramène à la décomposition du vecteur **OB** suivant les directions

$$\mathbf{OA}^1, \ \mathbf{OA}^2, \ \ldots, \ \mathbf{OA}^s.$$

Nous voyons déjà que ce problème sera soumis à la condition de possibilité suivante : *Il est nécessaire que les $s+1$ vecteurs*

$$\mathbf{OA}^1, \ \mathbf{OA}^2, \ \ldots, \ \mathbf{OA}^s, \ \mathbf{OB}$$

appartiennent à une même multiplicité linéaire.

Au point de vue de la discussion qui va suivre, nous devons regarder

$$\mathbf{OA}^1, \ \mathbf{OA}^2, \ \ldots, \ \mathbf{OA}^s$$

comme donnés, et étudier les différents cas entraînés par tel ou tel choix de **OB**.

Il n'arrive pas toujours, nous le savons, que

$$\mathbf{OA}^1, \ \mathbf{OA}^2, \ \ldots, \ \mathbf{OA}^s$$

déterminent une multiplicité linéaire d'ordre s. Mais à défaut de cela, notre attention va se porter naturellement sur *la multiplicité linéaire d'ordre le plus élevé* contenant à la fois ces vecteurs. Appelons p cet ordre, et $\mathcal{M}_p$ cette multiplicité. L'entier p est donc au plus égal à s. Il ne saurait surpasser non plus le nombre n des dimensions de l'espace où nous raisonnons. Parmi les vecteurs

$$\mathbf{OA}^1, \ \mathbf{OA}^2, \ \ldots, \ \mathbf{OA}^s$$

il en existe certainement p qui ne sauraient se trouver dans une multiplicité d'ordre inférieur. Supposons que les notations aient été choisies de manière que cette propriété appartienne aux p premiers vecteurs [1], c'est-à-dire à

$$\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^p.$$

Nous pourrons énoncer alors le résultat suivant :

Le système (21) *et l'équation équivalente* (22) *seront compatibles pourvu que* **OB** *appartienne à la multiplicité linéaire* $\mathfrak{M}_p$ *admettant comme système fondamental celui des* p *vecteurs*

$$\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^p.$$

Si l'on a $p = s$, *on aura une décomposition unique, le système* (21) *admettra une solution et une seule. Si l'on a par contre* $s > p$, *il y aura indétermination d'ordre* $s - p$.

Cet énoncé est la conséquence immédiate des définitions que nous avons posées, concernant les multiplicités linéaires.

Le plan de la discussion du système (21) est donc maintenant tracé et il nous suffit de traduire, dans le langage de la théorie des déterminants, les résultats obtenus.

Avant d'entreprendre cette traduction, remarquons que nos conditions de compatibilité peuvent s'exprimer de la manière suivante : il faut que **OB** soit dans la multiplicité $\mathfrak{M}_p$. Or, d'après l'énoncé général du n° 37, il faut et il suffit pour cela que, dans chaque multiplicité $\mathfrak{M}_{p+1}$ contenant $\mathfrak{M}_p$, l'on ait

$$(23) \qquad (\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^p,\ \mathbf{OB}) = 0.$$

Nous allons maintenant exprimer ces résultats dans le style des déterminants. La notion de la multiplicité $\mathfrak{M}_p$ nous amènera à celle de *déterminant principal*, tandis que les premiers membres des équations (23) engendreront les *déterminants caractéristiques*. Nous retomberons ainsi, d'une manière naturelle, sur l'ordre d'idées établi par Rouché et Fontené.

46. Déterminant principal, déterminants caractéristiques. — Il nous faut exprimer d'abord que

$$\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^p$$

forment un système fondamental dans une multiplicité linéaire d'ordre p. Pour cela, il faut et il suffit (n° 37) que l'étendue d'ordre p

$$(\mathbf{OA}^1,\ \mathbf{OA}^2,\ \ldots,\ \mathbf{OA}^p)$$

ne soit pas nulle.

Cette condition s'exprime immédiatement lorsque l'ordre p de la multiplicité $\mathfrak{M}_p$

(1) Cette supposition est légitime, puisque l'ordre des vecteurs est arbitraire.

est égal au nombre n des équations, ou encore des dimensions de l'espace. La traduction est alors, nous l'avons déjà vu au n° **44**,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Proposons-nous maintenant de l'exprimer en supposant

$$n > p.$$

Nous utiliserons dans ce but les remarques suivantes :

1° Pour que n vecteurs forment, dans un espace à n dimensions, un système fondamental, il faut que p quelconques de ces vecteurs forment aussi un système fondamental dans la multiplicité d'ordre p qu'ils déterminent. Ceci n'est qu'une autre forme de l'énoncé du théorème du n° 37.

2° Soient p vecteurs $\mathbf{OA}^1, \dots, \mathbf{OA}^p$, déterminant *effectivement* une multiplicité $\mathcal{M}_p$. On peut toujours choisir $n - p$ autres vecteurs $\mathbf{OA}^{p+1}, \dots \mathbf{OA}^n$ de manière que le système

$$\mathbf{OA}^1, \dots, \mathbf{OA}^p, \mathbf{OA}^{p+1}, \dots, \mathbf{OA}^n$$

soit fondamental dans l'espace à n dimensions. En effet, prenons un vecteur $\mathbf{OA}^{p+1}$ quelconque en dehors de la multiplicité $\mathcal{M}_p$. Les vecteurs $\mathbf{OA}^1, \dots, \mathbf{OA}^p, \mathbf{OA}^{p+1}$ déterminent une nouvelle multiplicité linéaire $\mathcal{M}_{p+1}$. On choisira $\mathbf{OA}^{p+2}$ (s'il y a lieu) en dehors de cette multiplicité et ainsi de suite.

Ces deux remarques peuvent être synthétisées dans l'énoncé suivant :

Pour que l'étendue d'ordre p

$$(\mathbf{OA}^1, \mathbf{OA}^2, \dots, \mathbf{OA}^p)$$

ne soit pas nulle, il faut et il suffit que l'étendue d'ordre n

$$(\mathbf{OA}^1, \mathbf{OA}^2, \dots, \mathbf{OA}^p, \mathbf{OA}^{p+1}, \dots, \mathbf{OA}^n)$$

ne soit pas identiquement nulle, lorsqu'on laisse complètement arbitraires les vecteurs

$$\mathbf{OA}^{p+1}, \dots, \mathbf{OA}^n.$$

Nous devrons donc écrire que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p & a_1^{p+1} & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p & a_2^{p+1} & \dots & a_2^n \\ & & & & & & \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^p & a_n^{p+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

est une forme $(n - p)$ fois linéaire, *non identiquement nulle*, des $n - p$ séries de variables écrites dans ses $n - p$ dernières colonnes. Mais, d'après les raisonnements

des nos 41 et 42, il faut et il suffit pour cela qu'on puisse extraire du tableau formé par les p premières colonnes au moins, un déterminant qui soit précisément d'ordre p, et qui diffère de zéro.

C'est au déterminant (ou à l'un des déterminants) remplissant cette condition que Rouché a donné le nom de *déterminant principal* : en résumé, le déterminant principal d'un système d'équations linéaires sera donc un déterminant extrait du tableau des coefficients, et astreint aux conditions de ne pas être nul et d'avoir un ordre aussi élevé que possible.

47. Cela posé, nos conditions de compatibilité peuvent s'écrire

$$(\mathbf{OA}^1, \mathbf{OA}^2, \ldots, \mathbf{OA}^p, \mathbf{OB}) = 0, \tag{23}$$

en supposant que le déterminant principal provient des coefficients des p premières inconnues. L'ordre des équations étant arbitraire, nous pouvons même faire en sorte qu'il provienne des coefficients des p premières inconnues *dans les p premières équations.*

Nous sommes conduits cette fois à exprimer que toute forme $n-p-1$ fois linéaire, telle que φ,

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^p & b_1 & \alpha_1^{p+2} & \ldots & \alpha_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^p & b_2 & \alpha_2^{p+2} & \ldots & \alpha_2^n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^p & b_n & \alpha_n^{p+2} & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

des $n-p-1$ séries de variables α, écrites dans les dernières colonnes, est identiquement nulle. Donc tous les coefficients de cette forme doivent être nuls. Parmi ces coefficients, on appelle plus spécialement *déterminants caractéristiques* ceux qu'on obtient en bordant le déterminant principal, inférieurement par les coefficients de $x_1 \ldots x_p$ dans l'une des équations de rang $> p$, et latéralement par les termes des seconds membres d'indice concordant avec les indices inférieurs des termes écrits dans la même ligne.

Par exemple, en appelant h un entier moindre que $n-p$, ou au plus égal, le déterminant caractéristique correspondant à l'équation de rang $p+h$ s'écrira

$$\Delta_{p+h} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^p & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^p & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^p & b_p \\ a_{p+h}^1 & a_{p+h}^2 & \ldots & a_{p+h}^p & b_{p+h} \end{vmatrix}.$$

Si l'on annule identiquement φ, on est amené à égaler à zéro, non seulement ces déterminants caractéristiques, mais tous les déterminants d'ordre $p+1$ extraits du tableau des $p+1$ premières colonnes de φ. Le nombre de ces déterminants est

$$C_n^{p+1}.$$

Il se réduit à l'unité lorsque $n = p + 1$. Dans ce cas, il y a une condition de compatibilité et une seule

$$\text{(24)} \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^1 & a_p^2 & \dots & a_p^p & b_p \\ a_{p+1}^1 & a_{p+1}^2 & \dots & a_{p+1}^p & b_{p+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque n surpasse $p + 1$, il suffit, pour la compatibilité, que tous les déterminants caractéristiques soient nuls. En effet, les p premières équations, qui concourent par hypothèse à la formation du déterminant principal, sont manifestement compatibles, car pour y satisfaire, il suffit de choisir arbitrairement les valeurs de

$$x_{p+1}, \ \dots \ x_n,$$

et de tirer ensuite celles des p premières inconnues par la règle de Cramer. Exprimons alors que chacune des équations suivantes est compatible avec les p premières. Pour l'équation de rang $p + h$, par exemple, nous obtiendrons d'après la condition (24) de compatibilité de $p + 1$ équations à p inconnues :

$$\text{(24 } bis\text{)} \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p & b_1 - a_1^{p+1}x_{p+1} - \dots - a_1^n x_n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p & b_2 - a_2^{p+1}x_{p+1} - \dots - a_2^n x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^1 & a_p^2 & \dots & a_p^p & b_p - a_p^{p+1}x_{p+1} - \dots - a_p^n x_n \\ a_{p+h}^1 & a_{p+h}^2 & \dots & a_{p+h}^p & b_{p+h} - a_{p+h}^{p+1}x_{p+1} - \dots - a_{p+h}^n x_n \end{vmatrix} = 0.$$

(cette condition s'obtient en regardant $x_1, \ . \ . \ ., x_p$ comme les seules inconnues, les autres inconnues recevant des valeurs arbitraires). Or si l'on fait appel à la linéarité de ce déterminant par rapport aux éléments de sa dernière colonne, on peut l'écrire sous la forme d'une somme de déterminants dont le premier est le caractéristique Δ_{p+h} et dont tous les autres sont nuls comme étant le produit d'un des x (d'indice $> p$) par un déterminant d'ordre $p + 1$, extrait du tableau des coefficients. Or ce dernier est forcément nul, puisque surpassant l'ordre du déterminant principal.

Si donc l'on a

$$\Delta_{p+1} = 0, \ \dots, \ \Delta_{p+h} = 0, \ \dots, \ \Delta_n = 0,$$

tout système de nombres $x_1 \ . \ . \ . \ x_p, x_{p+1}, \ . \ . \ ., x_n$ satisfaisant aux p premières équations vérifiera également les $n - p$ suivantes.

En résumé, *pour que le système admette des solutions, il faut et il suffit que tous les caractéristiques soient nuls. L'ordre de l'indétermination est* $s - p$.

Le théorème de Rouché est établi.

Pour terminer cette première partie, il nous reste à indiquer les propriétés fondamentales des transformations linéaires. Nous aurons ainsi une vue plus nette des résultats obtenus jusqu'à présent.

VII

Notions sur les transformations linéaires.

48. Définition des transformations linéaires. — Imaginons deux points M et M', et supposons, — chose non indispensable, mais commode pour la suite —, qu'on rapporte le point M à un premier système fondamental OA, OB, OC, et le point M' à un autre système fondamental O'A', O'B', O'C'. Nous supposons donc, et ce n'est là qu'une limitation apparente de la généralité, que nous nous plaçons dans un espace à trois dimensions. Soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées de M et M' dans leurs systèmes respectifs, de sorte que l'on a

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC},$$
$$\mathbf{O'M'} = x'\mathbf{O'A'} + y'\mathbf{O'B'} + z'\mathbf{O'C'}.$$

Nous dirons que M' se déduit de M par une transformation linéaire si x', y', z' se déduisent de x, y, z par des formules entières et du premier degré,

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= x_0 + a_1x + b_1y + c_1z,\\ y' &= y_0 + a_2x + b_2y + c_2z,\\ z' &= z_0 + a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned}\right.$$

Les formules de transformation étant elles-mêmes linéaires, les formules (25) seront remplacées par d'autres de même forme si l'on modifie d'une manière quelconque le système fondamental du point M et celui du point M'.

Ces formules (25) font correspondre à chaque point M un point M' et un seul. Nous supposons que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

49. Détermination d'une transformation linéaire par la donnée de quatre points et de leurs correspondants. — Supposons toujours que O, A, B, C ne soient pas situés dans un même plan, et que la transformation leur fasse correspondre précisément les points O', A', B', C', non situés eux-mêmes dans un plan.

Dans cette hypothèse, nous allons voir que les formules (25) prennent une forme particulièrement simple.

En effet, appelons toujours M' le correspondant de M.

Exprimons successivement que si M vient occuper l'une des positions O, A, B, C, M' viendra occuper les positions respectives O', A', B', C'.

1° Tout d'abord, la simultanéité des coïncidences de M et O et de M' et O' exige que **O'M'** s'annule en même temps que **OM**, ou encore que x', y', z' s'annulent dès que x, y, z s'annulent ensemble. Ceci exige que dans les formules (25), on ait

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

2° La simultanéité des coïncidences de M et de A d'une part, de M′ et de A′ d'autre part, exige que les égalités $x = 1$, $y = z = 0$ entraînent $x' = 1$, $y' = z' = 0$. Dans les formules (25), on devra donc avoir

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = a_3 = 0.$$

3° Pour que B′ corresponde à B, il faut de même que les conditions $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ entraînent $x' = 0$, $y' = 1$, $z' = 0$. Dans les formules (25), on devra donc avoir

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = 1, \qquad b_3 = 0.$$

4° Pour que C′ corresponde à C, il faut enfin que l'on ait

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = 1.$$

Finalement, les formules (25) se réduisent donc à

$$x' = x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

En résumé, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Pour déterminer une transformation linéaire, il suffit de connaître les transformés O′, A′, B′, C′ *de quatre points arbitraires* O, A, B, C. *Pour que deux points* M *et* M′ *se correspondent par la transformation, il faut et il suffit que l'on ait simultanément*

$$(26) \qquad \begin{cases} \mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}, \\ \mathbf{O'M'} = x\mathbf{O'A'} + y\mathbf{O'B'} + z\mathbf{O'C'}. \end{cases}$$

Cet énoncé suppose qu'il n'existe aucun plan contenant à la fois, ni les points O, A, B, C, ni les points O′, A′, B′, C′.

50. Propriété fondamentale des transformations linéaires. — *Si deux figures* φ *et* ψ *se correspondent par translation, les figures* φ' *et* ψ' *qu'on en déduit par une transformation linéaire se correspondent aussi par translation.*

En effet, appelons M un point de la figure φ : on en déduit, par une certaine translation, un point P de la figure ψ. Rapportons M et P au système fondamental **OA**, **OB**, **OC** et supposons que l'on ait

$$\begin{cases} \mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}, \\ \mathbf{OP} = u\mathbf{OA} + v\mathbf{OB} + w\mathbf{OC}. \end{cases}$$

En appelant O′, A′, B′, C′, M′, P′ les transformés de O, A, B, C, M, P par la transformation linéaire, les deux équations vectorielles précédentes entraîneront les deux suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{O'M'} = x\mathbf{O'A'} + y\mathbf{O'B'} + z\mathbf{O'C'}, \\ \mathbf{O'P'} = u\mathbf{O'A'} + v\mathbf{O'B'} + w\mathbf{O'C'}. \end{cases}$$

Par soustraction, on en déduit que l'on aura simultanément

$$\mathbf{MP} = (u - x)\,\mathbf{OA} + (v - y)\,\mathbf{OB} + (w - z)\,\mathbf{OC},$$
$$\mathbf{M'P'} = (u - x)\,\mathbf{O'A'} + (v - y)\,\mathbf{O'B'} + (w - z)\,\mathbf{O'C'}.$$

Puisque P se déduit de M par une translation, la grandeur vectorielle **MP** est constante. Donc ses composantes $u-x$, $v-y$, $w-z$ sont constantes. Mais il en résulte que la grandeur vectorielle **M'P'** est constante. Donc, P' se déduit aussi de M' par une translation. (C. Q. F. D.)

Le raisonnement précédent montre d'ailleurs que, moyennant nos hypothèses, la translation

$$\lambda \mathbf{OA} + \mu \mathbf{OB} + \nu \mathbf{OC}$$

donne naissance, après la transformation linéaire, à la translation

$$\lambda \mathbf{O'A'} + \mu \mathbf{O'B'} + \nu \mathbf{O'C'}.$$

En particulier, aux translations $\lambda \mathbf{OA}$ correspondront les translations $\lambda \mathbf{O'A'}$: il s'ensuit qu'une droite devient, par une transformation linéaire, une autre droite (ceci est établi pour la droite OA, et par conséquent pour toute droite, puisque les points O et A sont arbitraires).

Aux translations $\lambda \mathbf{OA} + \mu \mathbf{OB}$ correspondront les translations $\lambda \mathbf{O'A'} + \mu \mathbf{O'B'}$. Donc à un plan correspondra un plan (ceci est établi pour le plan OAB, et par conséquent pour tout plan, puisque O, A, B sont arbitraires).

En outre, à des éléments parallèles correspondront nécessairement des éléments parallèles, en vertu de la propriété fondamentale des translations.

51. Groupe linéaire. — Considérons deux transformations linéaires, qui font correspondre :

a) la première, aux points O, A, B, C, M les points O', A', B', C', M';

b) la seconde, aux points O', A', B' C', M' les points O'', A'', B'', C'', M''.

Puisqu'il existe une même correspondance linéaire transformant O, A, B, C, M en O', A', B', C', M', on a simultanément

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC},$$
$$\mathbf{O'M'} = x\mathbf{O'A'} + y\mathbf{O'B'} + z\mathbf{O'C'}$$

et puisqu'il existe une même correspondance linéaire, transformant O', A', B', C', M' en O'', A'', B'', C'', M'', on a simultanément

$$\mathbf{O'M'} = x\mathbf{O'A'} + y\mathbf{O'B'} + z\mathbf{O'C'},$$
$$\mathbf{O''M''} = x\mathbf{O''A''} + y\mathbf{O''B''} + z\mathbf{O''C''}.$$

En comparant les deux égalités extrêmes, on en conclut qu'il existe une correspondance linéaire, par laquelle O, A, B, C, M se transforment directement en O'', A'', B'', C'', M''.

Ainsi, considérons la famille des transformations linéaires. En composant entre elles deux transformations de cette famille, on obtient encore une transformation de la même famille. On peut donc, en utilisant la définition du n° 10, énoncer le résultat suivant :

Les transformations linéaires forment un groupe.

On donne au groupe ainsi obtenu le nom de groupe linéaire.

52. Nouvelle manière de concevoir la géométrie linéaire. — Nous avons déjà signalé (n° 16) l'opportunité d'une classification des théorèmes de la

géométrie ordinaire en propositions linéaires d'une part, et en propositions métriques de l'autre. Pour reconnaître les premières, nous avons indiqué un moyen, *basé sur un caractère négatif* : on s'assure que dans l'énoncé, il n'intervient ni mesure d'angles, ni évaluation du rapport de deux longueurs de directions différentes. Mais ce n'est là qu'un procédé intuitif, et au point de vue théorique, il importe de donner des propositions linéaires en général une définition précise. Cette définition nous est fournie par l'étude des transformations linéaires.

Nous dirons qu'une propriété d'une figure (F) est linéaire si cette même propriété appartient à une figure (F′) déduite de (F) par une transformation linéaire; ce qui peut s'énoncer encore sous forme plus concise :

Les propriétés linéaires sont celles qui sont invariantes par les transformations du groupe linéaire.

A un tétraèdre OABC on peut faire correspondre, par une transformation linéaire appropriée, un tétraèdre quelconque O′A′B′C′. Un angle, un rapport de longueurs de deux portions de droites non parallèles, seront donc altérés. Toute proposition linéaire devra de ce fait, nous le vérifions, posséder le caractère négatif que nous avons signalé. La démonstration d'une réciproque ne s'impose d'ailleurs nullement tant que nous n'avons *de la géométrie ordinaire* que la notion intuitive et vague qui est la plus répandue. Cette notion sera précisée dans la suite. Pour le moment, nous nous contenterons de substituer à la définition du n° 16 celle qui vient d'être formulée à l'instant, en remarquant qu'elle englobe toutes les propositions dont nous avons eu à faire usage. Elle englobe également la notion de barycentre, que nous allons faire connaître à cette occasion.

53. Barycentres. — La notion générale de barycentre résulte du théorème suivant :

Étant donnés des points $M_1, M_2, \ldots, M_k$ *affectés de coefficients* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *tels que la somme algébrique*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

ne soit pas nulle, le point G *défini par l'égalité vectorielle*

$$(27) \quad m_1\mathbf{OM}_1 + m_2\,\mathbf{OM}_2 + \ldots + m_k\mathbf{OM}_k = (m_1 + m_2 + \ldots + m_k)\mathbf{OG}$$

est indépendant de la position du point O.

Remarquons d'abord que, d'après la restriction imposée à la somme

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k,$$

l'égalité (27) permet, si l'on a choisi un point O, de construire le point G, sans ambiguïté. Il faut montrer que le résultat de cette construction est indépendant du choix de O. En effet, considérons un autre point O′. Nous aurons

$$\mathbf{OM}_1 = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{OM}_k = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}_k.$$

Multiplions ces égalités respectivement par $m_1, \ldots m_k$ et ajoutons. Il vient, en portant dans le premier membre de (27),

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)\mathbf{OO'} + m_1\mathbf{O'M}_1 + \ldots + m_k\mathbf{O'M}_k.$$

Après transformation du second membre, on a, en simplifiant,

$$(27') \qquad m_1\mathbf{O'M}_1 + \dots + m_k\mathbf{O'M}_k = (m_1 + \dots + m_k)\mathbf{O'G},$$

ce qui montre qu'on aurait obtenu le même point G en substituant au point O un point quelconque O'. C. Q. F. D.

D'après ce théorème, on peut, dans l'égalité (27), sous-entendre la lettre O, et écrire symboliquement

$$G(m_1 + m_2 + \dots + m_k) = m_1M_1 + m_2M_2 + \dots + m_kM_k.$$

En particulier, le symbolisme $\frac{A+B}{2}$ représentera le milieu du segment AB; le symbolisme $\frac{A+B+C}{3}$ représentera le point de concours des médianes du triangle ABC, etc.

Soit encore le tétraèdre ABCD. Considérons le point O défini par la relation

$$O = \frac{A+B+C+D}{4}.$$

Considérons dans les diverses faces les points de concours des médianes, soit A' celui de la face opposée à A, etc., nous pouvons écrire

$$O = \frac{A+3A'}{4} = \frac{B+3B'}{4} = \frac{C+3C'}{4} = \frac{D+3D'}{4}.$$

Donc le point O appartient aux quatre droites joignant chaque sommet au point de concours des médianes de la face opposée : il est aux trois quarts de chacune d'elles à partir du sommet.

On peut aussi écrire

$$O = \frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A+C}{2} + \frac{B+D}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A+D}{2} + \frac{B+C}{2}\right),$$

égalités qui montrent que O est le milieu commun des segments terminés aux milieux des arêtes opposées du tétraèdre.

Il est manifeste que toutes ces propriétés sont du domaine de la géométrie linéaire.

54. Transformations linéaires de vecteurs. — A côté des transformations linéaires de point à point, il y a intérêt à considérer des transformations linéaires de vecteur libre à vecteur libre. On passe aisément des unes aux autres. De toute transformation linéaire point à point, on déduit une transformation de vecteurs : du théorème du n° 50, il résulte en effet que si l'on a

$$\mathbf{MP} = \mathbf{M_1P_1},$$

les points transformés donnent lieu à la relation

$$\mathbf{M'P'} = \mathbf{M'_1P'_1}.$$

A un vecteur libre correspond donc un autre vecteur libre. Si les vecteurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ont pour transformés $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, le transformé de $x\mathcal{A}+y\mathcal{B}+z\mathcal{C}$ sera $x\mathcal{A}'+y\mathcal{B}'+z\mathcal{C}'$.

Inversement, d'une correspondance linéaire de vecteurs, on déduit une infinité de transformations linéaires ponctuelles, qui s'équivalent à une translation près. Pour le voir, fixons un point O : on peut choisir arbitrairement son homologue O'; le point M' sera alors l'homologue de M si la grandeur géométrique **O'M'** est la transformée de **OM**, ce qui démontre la proposition.

55. Déterminant d'une transformation linéaire. — Considérons une transformation linéaire (ponctuelle ou vectorielle), qui aux vecteurs libres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ fait correspondre les vecteurs $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{B} + a_3\mathcal{C}, \\ \mathcal{B}' &= b_1\mathcal{A} + b_2\mathcal{B} + b_3\mathcal{C}, \\ \mathcal{C}' &= c_1\mathcal{A} + c_2\mathcal{B} + c_3\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Nous avons établi la relation

$$(28) \qquad (\mathcal{A}',\ \mathcal{B}',\ \mathcal{C}') = (\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C}) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

A des vecteurs $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ liés à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ par des relations

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= u_1\mathcal{A} + u_2\mathcal{B} + u_3\mathcal{C}, \\ \mathcal{V} &= v_1\mathcal{A} + v_2\mathcal{B} + v_3\mathcal{C}, \\ \mathcal{W} &= w_1\mathcal{A} + w_2\mathcal{B} + w_3\mathcal{C} \end{aligned}$$

correspondront des vecteurs $\mathcal{U}'$, $\mathcal{V}'$, $\mathcal{W}'$ liés à $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ par des relations

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= u_1\mathcal{A}' + u_2\mathcal{B}' + u_3\mathcal{C}', \\ \mathcal{V}' &= v_1\mathcal{A}' + v_2\mathcal{B}' + v_3\mathcal{C}', \\ \mathcal{W}' &= w_1\mathcal{A}' + w_2\mathcal{B}' + w_3\mathcal{C}', \end{aligned}$$

où les coefficients sont exactement ceux des précédentes. Désignons par δ le déterminant du tableau commun de ces coefficients. Nous pouvons écrire les deux relations

$$\begin{aligned} (\mathcal{U},\ \mathcal{V},\ \mathcal{W}) &= (\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C})\delta, \\ (\mathcal{U}',\ \mathcal{V}',\ \mathcal{W}') &= (\mathcal{A}',\ \mathcal{B}',\ \mathcal{C}')\delta; \end{aligned}$$

en les comparant à (28), nous obtenons la relation

$$(29) \qquad (\mathcal{U}',\ \mathcal{V}',\ \mathcal{W}') = (\mathcal{U},\ \mathcal{V},\ \mathcal{W}).\Delta,$$

applicable à trois vecteurs quelconques et à leurs transformés, et où Δ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

On dit que Δ est le déterminant de la transformation. La relation (29) confère à ce déterminant une signification remarquable. Plaçons-nous au point de vue des correspondances point à point. Elle exprime que Δ est le rapport d'un volume transformé au volume initial. Ainsi donc :

Une transformation linéaire modifie le volume d'un parallélépipède (et, de ce fait, tout autre volume) *dans un rapport constant, égal au déterminant de cette transformation.*

Si le déterminant est positif, il résulte des conventions faites pour définir le signe du volume que la transformation conserve les sens d'orientation. En outre, il importe de remarquer que toutes les transformations qui conservent les sens d'orientation constituent, dans le groupe linéaire, un sous-groupe.

56. Transformations linéaires conservant les volumes. — Dans le sous-groupe précédent, il est possible d'en distinguer un autre, doué de la plus grande importance, celui des transformations linéaires conservant les volumes.

L'existence de ce sous-groupe résulte de ce que les deux relations

$$(O'A',\ O'B',\ O'C') = (OA,\ OB,\ OC)$$

et

$$(O''A'',\ O''B'',\ O''C'') = (O'A',\ O'B',\ O'C')$$

entraînent

$$(O''A'',\ O''B'',\ O''C'') = (OA,\ OB,\ OC).$$

On peut faire en outre la remarque suivante : soient φ et ψ deux figures liées par une correspondance linéaire qui conserve les volumes. Faisons une transformation linéaire quelconque. Nous obtenons deux nouvelles figures φ' et ψ'. D'après la formule (29) un volume de φ et le volume correspondant de φ' sont entre eux comme un volume de ψ et le volume correspondant de ψ'. Donc, dans la correspondance linéaire entre φ' et ψ', il y a encore conservation des volumes

Rapprochons maintenant l'un de l'autre les deux énoncés suivants :

Si deux figures se correspondent par translation, leurs transformées par une transformation linéaire se correspondent aussi par une certaine translation.

Si deux figures se correspondent linéairement et à volumes égaux, leurs transformées par une transformation linéaire se correspondent aussi linéairement et à volumes égaux.

Dans la théorie des groupes, on retient systématiquement le caractère abstrait commun aux deux énoncés précédents, et on l'exprime de la manière suivante : les translations d'une part, et les correspondances linéaires à volumes égaux d'autre part, sont deux sous-groupes du groupe linéaire. Ces sous-groupes sont tels qu'une de leurs transformations, par le jeu d'une transformation linéaire quelconque, se change en une autre transformation du même sous-groupe. De tels sous-groupes sont appelés SOUS-GROUPES INVARIANTS.

En résumé, *le sous-groupe des translations et celui des transformations linéaires conservant les volumes sont des sous-groupes invariants du groupe linéaire.*

Pour une bonne compréhension, il n'est pas inutile de donner un exemple du sous-groupe non invariant : prenons une droite donnée; toutes les transformations linéaires qui la laissent inaltérée forment un sous-groupe, attaché à cette droite; faisons maintenant une transformation linéaire quelconque, à la droite précédente elle fera correspondre une autre droite, et à une transformation du premier sous-groupe elle fera correspondre une transformation laissant invariante cette autre droite. Cette transformation n'appartiendra plus au premier sous-groupe. Celui-ci n'est donc pas un sous-groupe invariant.

57. Récapitulation. Autonomie et construction logique de la géométrie linéaire. — En commençant cet exposé, nous avons admis les résultats de la géométrie ordinaire; nous avons posé de nouvelles définitions et construit des raisonnements en harmonie avec ces résultats.

Toutefois, nous avons reconnu l'intérêt qui existe à mettre à part une classe de propositions où n'intervient jamais la comparaison de longueurs portées par des droites de directions différentes, et que nous avons caractérisées d'une manière plus précise par leur qualité d'invariance vis-à-vis des transformations du groupe linéaire.

L'exposition qui vient d'être donnée fait donc naître la géométrie linéaire au sein de la géométrie ordinaire elle-même.

Une question se pose immédiatement : l'ensemble des propositions linéaires forme-t-il un système logique indépendant? Autrement dit, est-on sûr, après avoir reconnu le caractère purement linéaire d'un théorème de la géométrie ordinaire, de pouvoir démontrer ce théorème en ne faisant appel qu'à certaines propositions linéaires plus simples?

A cette question, il faut répondre par l'affirmative. Nous allons montrer que la géométrie linéaire est susceptible d'une construction logique autonome, fondée sur les concepts de *vecteur* libre et de *point*, et sur des postulats qui établissent entre les rapports de ces notions préexistantes une sorte de réglementation (qui n'est pas de nécessité logique, mais qui est simplement *cohérente*). Nous nous conformerons à l'exposé donné de cette question par M. H. Weyl dans *Espace*, *Temps*, *Matière* [1].

Posons *a priori* l'existence de deux classes d'êtres abstraits : *points* et *vecteurs*. Attribuons-leur d'autorité les propriétés qui sont énoncées dans les postulats qui vont suivre. Voici d'abord ceux qui concernent exclusivement les vecteurs :

1° Deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ déterminent univoquement un vecteur $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

2° Un scalaire λ et un vecteur $\mathbf{a}$ déterminent univoquement un vecteur $\lambda\mathbf{a}$.

3° Ces opérations sont liées entre elles par les propriétés formelles (commutativité, associativité, distributivité) que nous avons déjà énoncées en temps utile.

4° Tout vecteur peut s'exprimer au moyen de n vecteurs fondamentaux, ou, si l'on préfère, l'espace possède n dimensions.

Au moyen de ces postulats, on peut construire la théorie des *multiplicités vectorielles linéaires* : une multiplicité vectorielle linéaire d'ordre p sera l'ensemble des vecteurs libres définis par une relation telle que

$$\mathbf{V}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_p\mathbf{a}_p,$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \ldots, \mathbf{a}_p$ étant des vecteurs qui n'appartiennent à aucune multiplicité linéaire d'ordre moindre que p. Les propositions concernant ces multiplicités seront invariantes par les transformations linéaires de vecteur à vecteur.

Il reste à introduire le concept de point, et à le mettre en rapport avec celui de vecteur libre. Il suffit à cet effet de poser trois nouveaux postulats :

(1) Traduction française par M. Juvet, pages 13 et suivantes. La question a été reprise par M. Juvet dans son ouvrage : *Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu.*

1° Deux points A et B déterminent un vecteur libre $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$.

2° Si A est un point, et si $\mathbf{a}$ est un vecteur, il existe un point B et un seul tel que $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$.

3° Si $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$ et si $\mathbf{BC} = \mathbf{b}$, on a $\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

En passant à un crible minutieux tous les raisonnements que nous avons faits jusqu'à présent, un logicien exercé constaterait que les deux concepts : point et vecteur, et les deux groupes de postulats précédents, sont les seuls éléments primordiaux dont nous ayons fait usage. Sans entrer dans le détail, on voit clairement qu'ils nous permettent de construire la théorie des *multiplicités ponctuelles linéaires*, telle que nous l'avons exposée dans la section VI, et la théorie des transformations ponctuelles linéaires, qui vient d'être étudiée dans le cas de $n = 3$, et qui se généralise sans peine : dans cette théorie, soulignons, pour terminer, le rôle prépondérant des égalités simultanées (26). Elles entraînent l'invariance de toute proposition de la géométrie linéaire par une transformation linéaire quelconque, ce qui justifie le point de vue adopté au n° 52 pour une définition générale des propositions linéaires.

DEUXIÈME PARTIE

OPÉRATIONS VECTORIELLES MÉTRIQUES

I

La multiplication scalaire et la géométrie métrique.

58. Longueur d'un vecteur. Angle de deux vecteurs. — Dans la section IV de la première partie, nous avons défini la notion de *fonction scalaire* d'un ou de plusieurs vecteurs. Cette notion va jouer maintenant un rôle prépondérant.

Puisque nous sommes en géométrie métrique, il existe pour chaque vecteur une fonction scalaire qui s'impose à notre considération : c'est la LONGUEUR de ce vecteur.

Soit un vecteur libre $\mathbf{V}$ de longueur l. Appelons α une quantité scalaire quelconque. Le vecteur $\alpha\mathbf{V}$ aura pour longueur $|\alpha| l$: cette règle a été donnée déjà pour la comparaison des vecteurs ayant même direction.

Mais, nous plaçant au point de vue métrique, nous devrons apprendre à comparer les longueurs de deux vecteurs ayant des directions quelconques. Le processus d'évaluation numérique du rapport de ces longueurs sera fixé par la suite.

59. Étant donnés deux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, nous ne pourrons regarder leur ensemble comme métriquement équivalent à celui de deux autres vecteurs $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_1'$ que si trois conditions sont remplies :

$$\text{longueur de } \mathbf{V} = \text{longueur de } \mathbf{V}_1,$$
$$\text{longueur de } \mathbf{V}' = \text{longueur de } \mathbf{V}_1',$$
$$\text{angle } (\mathbf{V}, \mathbf{V}') = \text{angle } (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1').$$

Précisons les caractères essentiels de ce que nous appelons

$$\text{angle } (\mathbf{V}, \mathbf{V}').$$

Par angle du vecteur $\mathbf{V}$ et du vecteur $\mathbf{V}'$, nous entendons une fonction scalaire *alternée* de ces deux vecteurs, indépendante du changement de $\mathbf{V}$ en $\alpha\mathbf{V}$ et de $\mathbf{V}'$ en $\alpha'\mathbf{V}'$ (quels que soient les scalaires α et α', *positifs*)

$$\text{angle } (\alpha\mathbf{V}, \alpha'\mathbf{V}') = \text{angle } (\mathbf{V}, \mathbf{V}'). \tag{30}$$

et telle enfin que l'existence d'un plan parallèle à la fois aux trois vecteurs **V**, **V**′, **V**″ entraîne la relation

$$(31) \qquad \text{angle}\,(\mathbf{V},\ \mathbf{V}') + \text{angle}\,(\mathbf{V}',\ \mathbf{V}'') = \text{angle}\,(\mathbf{V},\ \mathbf{V}'').$$

En résumé, nous pouvons dire qu'un système de deux vecteurs libres possède trois invariants métriques fondamentaux, les deux longueurs et l'angle, soient l, l' et θ.

Tous les systèmes possibles d'invariants métriques fondamentaux s'obtiendront en considérant trois fonctions indépendantes quelconques

$$f(l,\ l',\ \theta), \qquad g(l,\ l',\ \theta), \qquad h(l,\ l',\ \theta)$$

des trois invariants précédents.

Mais pratiquement, nous conserverons les invariants l et l', et nous substituerons à θ un nouvel invariant,

$$\varphi(l,\ l',\ \theta),$$

en déterminant la fonction φ de manière à astreindre nos futurs calculs à des règles aussi simples que possible.

60. Produit scalaire de deux vecteurs. — C'est en imposant *a priori* de telles règles à l'invariant φ qu'on construit la notion de produit scalaire.

Nous appellerons PRODUIT SCALAIRE de deux vecteurs une fonction scalaire et symétrique de ces deux vecteurs, astreinte en outre aux conditions suivantes :

1° Le produit scalaire de $\alpha\mathbf{V}$ et de $\mathbf{V}'$ s'obtient en faisant le produit ordinaire de α par le produit scalaire de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$.

2° Le produit scalaire de $\mathbf{V}$ par la somme géométrique de $\mathbf{V}'$ et $\mathbf{V}''$ est égal à la somme algébrique des deux produits scalaires de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}''$.

3° Le produit scalaire de $\mathbf{V}$ par lui-même est égal au carré l^2 de la *longueur* de $\mathbf{V}$.

Pour représenter le produit scalaire de $\mathbf{U}$ et de $\mathbf{V}$, nous adopterons la notation

$$\mathbf{U}.\mathbf{V}.$$

Remarquons que d'après la condition du 1°, la *longueur* définie par la condition 3° possédera la propriété suivante, dont nous avons souligné déjà la nécessité : si $\mathbf{V}$ a pour longueur l, $\alpha\mathbf{V}$ a pour longueur

$$|\alpha|\,l.$$

Des conditions 1° et 2°, on déduit que l'égalité géométrique

$$\mathbf{V} = \alpha'\mathbf{V}' + \alpha''\mathbf{V}''$$

entraîne l'égalité ordinaire

$$\mathbf{U}.\mathbf{V} = \alpha'\mathbf{U}.\mathbf{V}' + \alpha''\mathbf{U}.\mathbf{V}''.$$

Il en résulte que le produit scalaire de deux vecteurs est une fonction bilinéaire de ces vecteurs (n° 22). Retenons en outre que cette fonction est symétrique.

Ces propriétés entraînent d'importantes conséquences : soit un vecteur **U** non nul. Il existe une infinité de vecteurs **V** vérifiant la relation

$$\mathbf{U}.\mathbf{V} = 0. \tag{32}$$

Cette relation entre **U** et **V** est réciproque, d'après la propriété de symétrie.

En outre, elle exprime une propriété angulaire, car si elle est satisfaite par les vecteurs **U** et **V**, elle le sera par tous les vecteurs $\alpha\mathbf{U}$ et $\beta\mathbf{V}$, quels que soient les scalaires α et β.

Nous devons donc considérer la relation (32) comme définissant un certain angle.

U et **V** satisfaisant toujours à (32), l'angle précédent sera à la fois, en valeur absolue, celui des vecteurs **U** et **V**, et celui des vecteurs **U** et — **V**, car (32) entraîne $-\mathbf{V}.\mathbf{U} = 0$.

Donc, si d'un point O on mène deux portions de droites OA et OB, de grandeurs vectorielles **U** et **V**, OA fera avec OB et son prolongement des angles égaux.

On dit alors que OA est PERPENDICULAIRE à OB, ou encore que les vecteurs **U** et **V** sont *orthogonaux*.

Puisque le produit scalaire **U**.**V** est une fonction linéaire de **V**, tous les vecteurs **V** orthogonaux à **U** sont parallèles à un même plan. Le vecteur **U** n'est pas parallèle à ce plan, puisque le produit scalaire de **U** par lui-même est égal au carré de sa longueur.

61. Systèmes fondamentaux trirectangles. — Soient OA et OB deux portions de droites perpendiculaires. Il existe une droite et une seule issue de O et perpendiculaire à la fois à OA et OB. En effet, tous les vecteurs perpendiculaires en O à OA sont dans un plan (α) mené par OB. De même, les vecteurs perpendiculaires en O à OB sont dans un plan (β) mené par OA. Le plan (α) ne contient pas OA, et le plan (β) ne contient pas OB. Il s'ensuit que ces plans ne sont pas confondus : ils ont donc en commun une droite et une seule issue de O. Soit OC une portion de cette droite : elle est en dehors du plan OAB.

On peut donc trouver, et cela d'une infinité de manières, un *système fondamental* OA, OB, OC formé de vecteurs deux à deux rectangulaires. Nous dirons qu'un tel système fondamental est *trirectangle* ou *orthogonal*.

Nous dirons que le système fondamental est *orthogonal* et *normal* si les vecteurs OA, OB, OC ont une longueur commune égale à l'unité, et s'ils sont comme précédemment perpendiculaires deux à deux. Ces conditions peuvent se résumer de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{OA}^2 = \mathbf{OB}^2 = \mathbf{OC}^2 = 1, \\ \mathbf{OB}.\mathbf{OC} = \mathbf{OC}.\mathbf{OA} = \mathbf{OA}.\mathbf{OB} = 0.\end{array}\right. \tag{33}$$

62. Expressions du produit scalaire et du carré de la longueur en coordonnées orthogonales et normales. — Supposons que deux vecteurs **U** et **U**′ soient rapportés à un système fondamental OA, OB, OC, orthogonal et normal, et soient

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{U} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}, \\ \mathbf{U}' = x'\mathbf{OA} + y'\mathbf{OB} + z'\mathbf{OC}\end{array}\right.$$

les formules de décomposition de ces vecteurs. Pour obtenir le produit scalaire **U.U′**, nous pouvons, d'après les conditions 1° et 2° du n° 60, combiner membre à membre les deux égalités précédentes suivant un mode analogue à celui de la multiplication ordinaire. Nous obtenons ainsi

$$(34)\qquad \mathbf{U}.\mathbf{U}' = xx'\mathbf{OA}^2 + yy'\mathbf{OB}^2 + zz'\mathbf{OC}^2 + (yz' + zy')\mathbf{OB}.\mathbf{OC} + (zx' + xz')\mathbf{OC}.\mathbf{OA} + (xy' + yx')\mathbf{OA}.\mathbf{OB}.$$

En tenant compte des relations (33), qui expriment que le système OA, OB, OC est orthogonal et normal, nous obtenons finalement

$$(35)\qquad \mathbf{U}.\mathbf{U}' = xx' + yy' + zz'.$$

Nous en déduisons que la longueur l du vecteur **U** est donnée par

$$(36)\qquad l^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

63. Autre expression du produit scalaire. — *Prenons* **OA** *parallèle au vecteur* **U** lui-même. Nous aurons alors $y = z = 0$, et le produit scalaire **U.U′** se réduira à

$$xx'.$$

Si nous convenons en outre de prendre **OA** dans le sens de **U**, x sera positif et égal à la longueur de **U** [en vertu de la formule (36)]. Quant à x', il représente le rapport algébrique à l'unité de longueur **OA** du vecteur obtenu en *projetant orthogonalement* **U′** sur la droite OA : en effet, menons par O un vecteur lié OM′, de grandeur géométrique **U′**; le nombre x' est la mesure de la composante de OM′ suivant OA. Or, on obtient cette dernière en menant par M′ le plan parallèle à OBC, qui est ici le plan perpendiculaire à OA, c'est-à-dire en projetant orthogonalement M′ en m' sur OA, et mesurant la portion de droite Om' : x' représente justement le rapport algébrique de cette dernière à l'unité **OA**. On dit aussi que x' est la *valeur algébrique de la projection orthogonale* de **OM′** (ou **U′**) sur l'axe orienté qui s'obtient en traçant OA et en adoptant le sens de O vers A (ou, si l'on préfère, sur **OA**). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit ordinaire de la longueur de l'un d'eux par la valeur algébrique de la projection de l'autre sur lui (ou si l'on préfère, sur l'axe de même support et de même sens).

Mais nous pouvons aller plus loin et remarquer que pour une direction bien déterminée de **U′**, x' est proportionnel à la longueur de **U′** soit

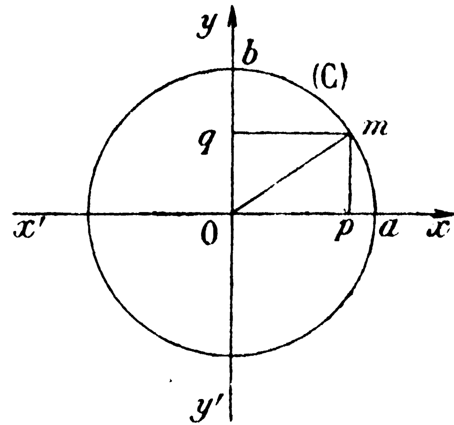
$$x' = kl'.$$

Si l'on attribue à **U′** différentes directions, c'est-à-dire à l'angle θ différentes valeurs, à chacune d'elles correspondra une valeur du coefficient de proportionnalité k. Ce dernier est donc une fonction de l'angle θ, et on peut écrire finalement

$$\mathbf{U}.\mathbf{U}' = ll'\varphi(\theta),$$

en désignant par $\varphi(\theta)$ la fonction précédente [$k = \varphi(\theta)$].

$\varphi(\theta)$ a une signification évidente : c'est la valeur algébrique de la projection sur un axe d'un vecteur de longueur égale à l'unité, lorsque ce vecteur et le sens positif de l'axe font l'angle θ.



Lions ce vecteur à un point fixe O de l'axe et convenons de ne le faire varier que dans un plan déterminé contenant cet axe. L'extrémité m du vecteur décrira dans ce plan une circonférence C de centre O et de rayon 1. Soit Oa le rayon de cette circonférence porté par l'axe, dans le sens positif de l'axe. Soit Ob le rayon perpendiculaire, choisi de manière qu'il faille tourner d'un droit dans le sens positif pour amener Oa sur Ob. Soient p et q les projections de m sur les droites Oa et Ob. Convenons, suivant les notations usuelles, de poser

$$(37) \qquad \begin{cases} \mathbf{Op} = \mathbf{Oa} \cos\theta, \\ \mathbf{Oq} = \mathbf{Ob} \sin\theta, \end{cases}$$

égalités qui entraînent

$$(38) \qquad \mathbf{Om} = \mathbf{Oa} \cos\theta + \mathbf{Ob} \sin\theta$$

et

$$\cos\theta = \mathbf{Om}.\mathbf{Oa}, \qquad \sin\theta = \mathbf{Om}.\mathbf{Ob}.$$

La fonction cos θ ainsi introduite n'est autre que la fonction $\varphi(\theta)$ qui intervient dans l'expression de $\mathbf{U}.\mathbf{U}'$. C'est pour la commodité de notre exposé ultérieur que nous introduisons en même temps la fonction sin θ.

Ces deux fonctions sont liées par la relation

$$(39) \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

qu'on obtient en égalant le produit scalaire par lui-même de chaque membre de l'équation (38).

64. Périodicité des fonctions cos θ **et** sin θ. — Reprenons la définition de l'angle, telle que nous l'avons donnée au n° 58. Nous allons établir la proportionnalité d'un angle au centre, tel que

$$(\widehat{Ox, Om})$$

à l'arc $\overset{\smile}{am}$ compris entre ses côtés. La longueur de cet arc est en effet définie par inscription d'une ligne polygonale et passage à la limite. Soit $am_1m_2 \ldots m_{i-1}\, m_i \ldots m$ une ligne polygonale inscrite dans l'arc am. Considérons un côté déterminé $m_{i-1}m_i$ de cette ligne. Nous avons

$$\mathbf{m}_{i-1}\mathbf{m}_i = \mathbf{Om}_i - \mathbf{Om}_{i-1},$$

donc le carré de la longueur de ce côté sera ici

$$2[1 - \cos(\widehat{Om_{i-}, Om_i})].$$

Il faut faire la somme des termes analogues et passer ensuite à la limite.

Or deux angles égaux interceptent des arcs auxquels on peut inscrire des lignes polygonales ayant leurs côtés de même rang égaux entre eux. En passant à la limite, il en résulte que ces arcs ont des longueurs égales.

Finalement, l'arc est donc une fonction continue de l'angle, et nous pouvons poser par exemple

$$\overset{\smile}{am} = F(\theta).$$

Convenons pour le moment que si m tend vers a, $\overset{\smile}{am}$ s'annule en même temps que θ. La relation (31), qui joue un rôle essentiel dans la définition de l'angle, nous apprend que si l'on pose

$$(\widehat{Oa, Om}) = \theta, \qquad (\widehat{Om, Om'}) = \theta',$$

d'où

$$\overset{\smile}{am} = F(\theta), \qquad \overset{\smile}{mm'} = F(\theta'),$$

on peut en déduire

$$\widehat{Oa, Om'} = \theta + \theta',$$

d'où

$$\overset{\smile}{am'} = F(\theta + \theta').$$

D'après la définition précédente de la longueur d'un arc, et la restriction imposée à deux points infiniment voisins de déterminer un arc infiniment petit, on a d'ailleurs

$$\overset{\smile}{am'} = \overset{\smile}{am} + \overset{\smile}{mm'}.$$

D'après cela, il faut que F (θ) vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(\theta + \theta') = F(\theta) + F(\theta')$$

quels que soient θ et θ'; ou encore, puisque la solution générale de cette dernière est de la forme

$$F(\theta) = m\theta,$$

il faut et il suffit qu'il y ait proportionnalité entre un arc et l'angle au centre correspondant.

Le facteur de proportionnalité m sera positif si l'on a soin de faire concorder le sens positif des angles et le sens positif des arcs. Il deviendra égal à 1 si on prend comme unité d'angle un angle particulier appelé *radian*, qui intercepte une corde égale au rayon, qui est ici l'unité de longueur.

De la notion de perpendicularité, rencontrée au n° 60, résulte d'ailleurs la conséquence que voici : considérons des angles tels que $(\widehat{Oa, Ob})$, $(\widehat{Ob, Oc})$, $(\widehat{Oc, Od})$, $(\widehat{Od, Oe})$ ayant pour valeur commune $+1$ droit. La demi-droite Oc se confond avec le prolongement Oa' de la demi-droite Oa, la demi-droite Od avec le prolongement Ob' de Ob, et enfin Oe coïncide avec Oa. Autrement dit, si à une demi-droite on fait subir, autour de son origine O, quatre *rotations* successives d'un droit, on la ramène à sa

position primitive. En même temps le point m effectue sur la circonférence qu'il décrit un trajet qui le ramène également à son point de départ.

Il s'ensuit que la circonférence est une courbe fermée, et que l'abscisse curviligne $\overset{\frown}{am}$ ne saurait être une fonction uniforme de la position de m sur cette courbe. Il existe sur la circonférence une infinité de manières d'aller de a en m : il leur correspond une infinité de déterminations de $\overset{\frown}{am}$, formant une progression arithmétique ayant comme raison la longueur de la circonférence (C). Soit 2π cette longueur, dont la mesure reste à déterminer.

L'angle de deux vecteurs d'un plan *n'est donc pas une fonction uniforme de ces vecteurs.* S'il admet la détermination θ, il est susceptible de toutes les déterminations

$$\theta + 2k\pi,$$

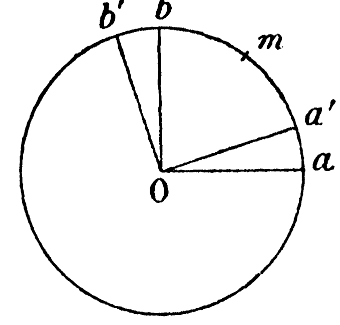
où k désigne un entier quelconque. Nous sommes par suite amenés à compléter la définition de l'angle que nous avons posée au n° 58, définition suivant laquelle l'angle d'un vecteur avec lui-même ne pouvait être que zéro, en vertu de la propriété d'*alternance*. En réalité, cette définition s'applique seulement à une détermination particulière.

Par contre, les produits scalaires $\mathbf{Oa}.\mathbf{Om}$ et $\mathbf{Ob}.\mathbf{Om}$ sont des fonctions uniformes du vecteur $\mathbf{Om}$. Lorsque θ, variant d'une manière continue, augmente de 2π, ces fonctions varient d'une manière continue, pour reprendre leur valeur primitive. D'où ce résultat :

Les fonctions $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$ *sont périodiques et ont pour période* 2π.

La théorie du changement de système fondamental, en géométrie plane, va d'ailleurs nous fournir les théorèmes d'addition de ces fonctions.

65. Formules d'addition pour le cosinus et le sinus. — Imaginons qu'on passe du système fondamental $\mathbf{Oa}$, $\mathbf{Ob}$ au système fondamental $\mathbf{Oa}'$, $\mathbf{Ob}'$, celui-ci étant défini relativement au premier par



$$\widehat{Oa, Oa'} = \alpha.$$

Nous pourrons écrire

$$(40)\quad \begin{cases} \mathbf{Oa}' = \mathbf{Oa}\cos\alpha + \mathbf{Ob}\sin\alpha, \\ \mathbf{Ob}' = \mathbf{Oa}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{Ob}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Considérons un point m du cercle (C) tel que

$$\widehat{Oa', Om} = \beta.$$

Nous pourrons donc écrire

$$(41)\quad \mathbf{Om} = \mathbf{Oa}\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{Ob}\sin(\alpha + \beta)$$

et

$$(42)\quad \mathbf{Om} = \mathbf{Oa}'\cos\beta + \mathbf{Ob}'\sin\beta.$$

Dans cette dernière équation, remplaçons **Oa**′ et **Ob**′ par leurs valeurs tirées des formules (40). Il nous vient

$$\mathbf{Om} = \mathbf{Oa}\left[\cos\alpha\cos\beta + \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta\right] + \mathbf{Ob}\left[\sin\alpha\cos\beta + \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta\right].$$

On en déduit les formules d'addition cherchées :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta.$$

Le caractère de symétrie de la seconde formule montre que l'on a nécessairement

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha,$$

ce qui se vérifierait d'ailleurs directement. On en déduit

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha,$$

et, finalement, nos formules deviennent

$$(43)\qquad \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

On déduit de ces formules toute la théorie des fonctions trigonométriques, et, entre autres, leurs propriétés différentielles. Cet exposé étant donné dans les cours d'analyse les plus élémentaires, nous ne nous y arrêterons pas.

66. Récapitulation : construction logique de la géométrie métrique. — En supposant la géométrie linéaire construite, et en introduisant deux nouveaux concepts fondamentaux, celui de la longueur d'un vecteur et celui de l'angle de deux vecteurs, nous venons de retrouver, par voie entièrement déductive, les théorèmes qui sont à la base de la géométrie ordinaire.

Contrairement aux propositions de la géométrie linéaire, les nouvelles propositions que nous venons d'obtenir ne sauraient subsister par une transformation linéaire quelconque : *les transformations linéaires qui les laissent inaltérées forment une classe spéciale*, soumise à la double condition de laisser invariants :

1° La longueur d'un vecteur quelconque, ou si l'on préfère la distance de deux points quelconques.

2° L'angle de deux vecteurs quelconques, ou leur produit scalaire.

Nous allons montrer que la première condition entraîne la seconde. En effet, si nous prenons un triangle quelconque ABC, nous pouvons écrire

$$\mathbf{BC} = \mathbf{BA} + \mathbf{AC}.$$

En faisant le produit scalaire de chaque membre par lui-même, il vient [1]

$$\mathbf{BC}^2 = \mathbf{BA}^2 + \mathbf{AC}^2 + 2\mathbf{BA}.\mathbf{AC},$$

ce qui s'écrit encore, à l'aide des notations consacrées de la résolution des triangles,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \tag{44}$$

Imaginons donc une transformation linéaire qui conserve la distance de deux points quelconques, et en particulier les distances $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; d'après la relation (44) elle laissera aussi invariante le produit scalaire

$$\mathbf{AB}.\mathbf{AC} = 2bc \cos A.$$

Nous allons désormais distinguer, sous le nom de *transformations métriques*, celles qui conservent les distances; parmi elles, nous réserverons le nom de *déplacements* aux transformations dont le déterminant est positif. Il est évident *a priori* que les translations appartiennent à cette dernière classe.

67. Recherche des transformations métriques. Forme fondamentale. — Prenons un système fondamental $\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}$, non plus orthogonal et normal, mais absolument quelconque. Le carré de la longueur du vecteur libre

$$\mathbf{V} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}$$

sera

$$l^2 = x^2\mathbf{OA}^2 + y^2\mathbf{OB}^2 + z^2\mathbf{OC}^2 + 2yz\mathbf{OB}.\mathbf{OC} + 2zx\mathbf{OC}.\mathbf{OA} + 2xy\mathbf{OA}.\mathbf{OB}. \tag{45}$$

Considérons une transformation linéaire qui fait correspondre au vecteur libre $\mathbf{V}$ un deuxième vecteur libre $\mathbf{V}'$ tel que

$$\mathbf{V}' = x'\mathbf{OA} + y'\mathbf{OB} + z'\mathbf{OC}.$$

Nous obtiendrons le carré l'^2 de la longueur de ce nouveau vecteur en changeant x, y, z en x', y', z' dans le second membre de la formule (45). Pour que la transformation considérée soit une transformation métrique, il faut et il suffit que l'on ait

$$l'^2 = l^2.$$

Donc *les transformations métriques sont les transformations linéaires particulières qui laissent invariante la forme quadratique écrite au second membre de la formule* (45), et dénommée FORME FONDAMENTALE.

Imaginons que l'on abandonne le système fondamental $\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}$ pour passer à un nouveau système $\mathbf{OI}, \mathbf{OJ}, \mathbf{OK}$ qui soit à la fois orthogonal et normal. Si l'on a dans ce système

$$\mathbf{V} = X\mathbf{OI} + Y\mathbf{OJ} + Z\mathbf{OK},$$

on aura

$$l^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \tag{46}$$

[1] Nous avons déjà présenté, au n° 64, un cas particulier de ce raisonnement.

Adoptons ce dernier mode de notations, et considérons une transformation métrique qui fasse correspondre aux vecteurs **OI**, **OJ**, **OK** les vecteurs **OI′**, **OJ′**, **OK′** et au vecteur

$$\mathbf{V} = X\mathbf{OI} + Y\mathbf{OJ} + Z\mathbf{OK},$$

le vecteur

$$\mathbf{V}' = X'\mathbf{OI} + Y'\mathbf{OJ} + Z'\mathbf{OK} = X\mathbf{OI}' + Y\mathbf{OJ}' + Z\mathbf{OK}',$$

X′,Y′,Z′ étant liés à X,Y,Z et **OI′**, **OJ′**, **OK′** à **OI**, **OJ**, **OK** par les formules

$$\begin{aligned} X' &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, &\quad \text{et} &\quad \mathbf{OI}' = \alpha_1\mathbf{OI} + \alpha_2\mathbf{OJ} + \alpha_3\mathbf{OK},\\ Y' &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z, &\quad \text{et} &\quad \mathbf{OJ}' = \beta_1\mathbf{OI} + \beta_2\mathbf{OJ} + \beta_3\mathbf{OK},\\ Z' &= \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z, &\quad \text{et} &\quad \mathbf{OK}' = \gamma_1\mathbf{OI} + \gamma_2\mathbf{OJ} + \gamma_3\mathbf{OK}. \end{aligned}$$

Pour que les coefficients des seconds membres soient vraiment ceux d'une transformation métrique, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

d'où les conditions, nécessaires et suffisantes,

$$(C) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1,\\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1,\\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0,\\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0,\\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0, \end{aligned}\right.$$

En exprimant que le système **OI′**, **OJ′**, **OK′**, transformé de **OI**, **OJ**, **OK**, est lui aussi orthogonal et normal (en vertu du caractère métrique de la transformation), on obtient six nouvelles relations

$$(C') \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1,\\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1,\\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0,\\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0,\\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0. \end{aligned}\right.$$

On démontre, dans tous les cours de géométrie analytique, que ces six équations forment un système équivalent aux six précédentes. Cette équivalence est d'ailleurs évidente géométriquement : d'une part si les six conditions (C) sont remplies, la transformation possédant de ce fait le caractère métrique, les six relations (C′) seront nécessairement vérifiées, puisque **OI′**, **OJ′**, **OK′** est un système orthogonal et normal. Inversement, si les six conditions (C′) sont remplies, la transformation envisagée fait passer d'un système orthogonal et normal à un autre analogue : étant linéaire, elle sera en même temps métrique; les relations (C) sont donc satisfaites. Notons enfin que, d'après la signification du déterminant (rapport de deux volumes correspondants), celui de toute transformation métrique sera nécessairement égal à ± 1.

68. Nous avons posé, au n° 22, la notion de fonction scalaire, entière et homogène, d'un vecteur libre; en particulier, on appelle *forme quadratique d'un vecteur* une fonction scalaire de ce vecteur, exprimable dans un certain système fondamental (et par suite dans tous les autres) par un polynome homogène et du second degré de ses composantes. Nous pouvons donc nous exprimer de la manière suivante :

Le carré de la longueur d'un vecteur est une forme quadratique de ce vecteur. Cette forme s'exprime par le polynome écrit au second membre de (45), quand on prend un système fondamental quelconque **OA, OB, OC**. Elle s'exprime par la formule (46) quand on prend le système fondamental **OI, OJ, OK** orthogonal et normal.

Il nous sera utile, pour la suite, d'étudier les formes quadratiques de vecteurs en nous plaçant au point de vue de la géométrie linéaire, et en ne retenant que les propriétés indépendantes du mode d'expression de la forme dans tel ou tel système fondamental particulier.

69. Formes quadratiques d'un vecteur (au point de vue linéaire). — Soit $Q(\mathbf{U})$ une forme quadratique du vecteur **U**. Appelons **U** et **V** deux vecteurs quelconques, λ et μ deux scalaires. Nous pourrons écrire

$$(47) \qquad Q(\lambda\mathbf{U}+\mu\mathbf{V}) = \lambda^2 Q(\mathbf{U}) + 2\lambda\mu P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \mu^2 Q(\mathbf{V}),$$

en désignant par $P(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ une fonction scalaire, bilinéaire et symétrique des deux vecteurs **U** et **V** : toutes ces propriétés se vérifient immédiatement en exprimant chaque terme dans un système fondamental quelconque.

La forme $Q(\mathbf{U})$ étant définie indépendamment de tout système fondamental, on doit regarder comme connues les quantités

$$Q(\lambda\mathbf{U}+\mu\mathbf{V}), \qquad Q(\mathbf{U}) \qquad \text{et} \qquad Q(\mathbf{V});$$

donc la forme bilinéaire symétrique

$$P(\mathbf{U}, \mathbf{V})$$

est douée elle-même d'une signification intrinsèque : on l'appelle *forme polaire* de la forme quadratique $Q(\mathbf{U})$.

Nous dirons que deux vecteurs **U** et **V** sont *conjugués* par rapport à la forme Q, si l'on a

$$P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0.$$

Le vecteur **U** étant donné, tous les vecteurs **V** conjugués de **U** sont coplanaires, du moins en général.

1° Soit $L(\mathbf{U})$ une forme linéaire du vecteur **U** (n° 22). Son carré $L^2(\mathbf{U})$ est une forme quadratique, et, en vertu de la relation

$$L(\lambda\mathbf{U}+\mu\mathbf{V}) = \lambda L(\mathbf{U}) + \mu L(\mathbf{V}),$$

la forme polaire de $L^2(\mathbf{U})$ sera $L(\mathbf{U})\, L(\mathbf{V})$. Pour que deux vecteurs soient conjugués, il faut et il suffit que l'un d'eux soit parallèle à la direction de plans déterminée par la condition

$$L(\mathbf{U}) = 0.$$

Il y a donc une direction exceptionnelle de plans dont tous les vecteurs **U** sont conjugués de tout autre vecteur **V**.

2° Prenons maintenant deux formes linéaires $L(\mathbf{U})$ et $M(\mathbf{U})$. Supposons qu'elles soient indépendantes, c'est-à-dire non liées par une relation de proportionnalité telle que

$$lL(\mathbf{U}) + mM(\mathbf{U}) \equiv 0$$

(à coefficients non nuls). Toute expression de la forme

$$a\mathrm{L}^2(\mathbf{U}) + b\mathrm{M}^2(\mathbf{U}),$$

sera une forme quadratique ayant pour forme polaire

$$a\mathrm{L}(\mathbf{U})\mathrm{L}(\mathbf{V}) + b\mathrm{M}(\mathbf{U})\mathrm{M}(\mathbf{V}).$$

En égalant à zéro cette expression, on impose à tous les vecteurs **V** d'être parallèles à un même plan, sauf si le vecteur **U** est choisi de façon qu'on ait à la fois

$$\mathrm{L}(\mathbf{U}) = \mathrm{M}(\mathbf{U}) = 0,$$

conditions qui déterminent une direction exceptionnelle de vecteurs **U** possédant la propriété d'être conjugués de tout autre vecteur **V**.

3° Enfin, prenons trois formes linéaires indépendantes L(**U**), M(**U**) et N(**U**), c'est-à-dire telles qu'il n'existe aucune identité de la forme

$$l\mathrm{L}(\mathbf{U}) + m\mathrm{M}(\mathbf{U}) + n\mathrm{N}(\mathbf{U}) = 0$$

entre ces trois vecteurs (à coefficients non tous nuls). L'expression

$$a\mathrm{L}^2(\mathbf{U}) + b\mathrm{M}^2(\mathbf{U}) + c\mathrm{N}^2(\mathbf{U})$$

est encore une forme quadratique dont la forme polaire

$$a\mathrm{L}(\mathbf{U})\mathrm{L}(\mathbf{V}) + b\mathrm{M}(\mathbf{U})\mathrm{M}(\mathbf{V}) + c\mathrm{N}(\mathbf{U})\mathrm{N}(\mathbf{V}),$$

ne s'annule identiquement en **V** pour aucun vecteur **U** non nul, car, en vertu de l'indépendance de L, M, N, il n'existe aucun vecteur **U** annulant simultanément ces trois expressions. Donc, dans ce dernier cas, tous les vecteurs **V** conjugués d'un même vecteur **U** seront effectivement coplanaires.

70. Décomposition en carrés. — Prenons une forme quadratique Q(**U**) et sa forme polaire P(**U**, **V**). Il peut se présenter différents cas : nous allons montrer que, dans l'espace à trois dimensions, les cas précédemment énumérés sont les seuls possibles, autrement dit que toute forme quadratique peut s'exprimer linéairement à l'aide des carrés de fonctions linéaires d'un vecteur, dont le nombre est au plus égal à trois.

1er Cas. — Supposons d'abord qu'il n'existe aucun vecteur **U** non nul, pour lequel la forme linéaire du vecteur **V**

$$\mathrm{P}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$$

soit identiquement nulle. Tout vecteur possède alors un plan polaire (lieu des vecteurs conjugués liés à un point) déterminé en direction. On peut toujours trouver un vecteur $\mathcal{A}$ non parallèle à son plan polaire (sinon la forme Q serait identiquement nulle). Appelons **v** un vecteur de ce plan. On peut mettre tout vecteur **V** de l'espace sous la forme

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + \mathbf{v},$$

et puisque $\mathcal{A}$ et **v** sont conjugués, nous aurons

$$\mathrm{Q}(\mathbf{V}) = \mathrm{Q}(x\mathcal{A} + \mathbf{v}) = x^2\mathrm{Q}(\mathcal{A}) + \mathrm{Q}(\mathbf{v});$$

Q(**v**) est la forme quadratique donnée, mais restreinte à une multiplicité linéaire dont l'ordre est ici deux, ou, pour parler d'une manière générale, s'est abaissé d'une unité. En posant

$$\mathbf{U} = x_0 \mathcal{A} + \mathbf{u},$$

on a d'ailleurs

$$P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = x x_0 Q(\mathcal{A}) + p(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

en appelant p (**u**, **v**) la forme polaire de la forme Q(**v**). De plus, il est impossible de trouver un vecteur **u** non nul, pour lequel la forme linéaire de **v**,

$$p(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

soit identiquement nulle, sinon en réduisant **U** à ce vecteur **u** (ce qui exige $x_0 = 0$), une propriété analogue appartiendrait à la forme P(**U**, **V**), ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut donc raisonner sur Q(**v**) comme on l'a fait sur la forme initiale. Soit, dans le plan polaire de $\mathcal{A}$, un vecteur $\mathcal{B}$ non confondu avec son conjugué par rapport à Q(**v**). Tous les vecteurs conjugués de $\mathcal{B}$ sont ici colinéaires, et l'on peut écrire tout vecteur **v** :

$$\mathbf{v} = y\mathcal{B} + \mathbf{w},$$

en appelant **w** un vecteur conjugué de $\mathcal{B}$, qui est d'ailleurs de la forme $z\mathcal{C}$, en appelant $\mathcal{C}$ un vecteur fixe, conjugué de $\mathcal{B}$. Nous obtiendrons finalement

$Q(\mathbf{V}) = x^2 Q(\mathcal{A}) + y^2 Q(\mathcal{B}) + z^2 Q(\mathcal{C}) =$ somme de trois carrés indépendants, le vecteur **V** ayant pour expression

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}.$$

2e Cas. — Supposons qu'il existe un vecteur **U** non nul, annulant identiquement la fonction P(**U**, **V**) du vecteur **V**. La même propriété appartiendra donc à tous les vecteurs colinéaires à **U**. Il y a alors deux hypothèses possibles : et, sous la rubrique 2e *cas*, nous n'étudierons ici qu'une de ces hypothèses, celle où la direction du vecteur **U** est seule à posséder la propriété précédente.

Appelons $\mathcal{A}$ un vecteur quelconque ayant cette direction. Tout système $\mathcal{A}$, **V** est conjugué quel que soit **V**. Prenons un plan P arbitraire non parallèle à $\mathcal{A}$, et désignons génériquement par **v** un vecteur de P, de manière qu'un vecteur **V** quelconque puisse s'écrire

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2)\mathcal{A} + \mathbf{v}.$$

Nous aurons, quels que soient x_1 et x_2,

$$Q(\mathbf{V}) = Q[(x_1 + x_2)\mathcal{A} + \mathbf{v}] = (x_1^2 + x_2^2) Q(\mathcal{A}) + Q(\mathbf{v}),$$

puisque $x_1\mathcal{A}$ est conjugué de tout autre vecteur et en particulier de $x_2\mathcal{A} + \mathbf{v}$. Mais une telle identité exige manifestement que $Q(\mathcal{A})$ soit nul, et que la forme considérée se réduise à $q(\mathbf{v})$.

Nous aurons d'ailleurs

$$P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = p(\mathbf{u}, \mathbf{v});$$

et puisque la direction de $\mathcal{A}$, la seule qui annule identiquement la fonction de **V** exprimée par $P(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, est en dehors du plan de **v**, on pourra traiter $p(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ en appliquant la méthode du premier cas. On l'exprimera ainsi à l'aide de deux carrés indépendants.

3e Cas. — S'il existe deux vecteurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ non nuls et non colinéaires, tels que les formes

$$P(\mathcal{A}, \mathbf{V}), \qquad P(\mathcal{B}, \mathbf{V})$$

soient identiquement nulles, on formera un système fondamental à l'aide des deux vecteurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, et d'un troisième vecteur $\mathcal{C}$. Un raisonnement analogue au précédent permet alors de réduire la forme étudiée à un seul carré indépendant.

En résumé, toute forme quadratique est une combinaison linéaire d'un, deux ou trois carrés indépendants (l'espace étant tridimensionnel). Le nombre de carrés indépendants se déduit d'ailleurs, d'après ce qui précède, des propriétés de la forme polaire $P(\mathbf{U}, \mathbf{V})$. Dans un système fondamental $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, où **V** s'exprime par l'égalité

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C},$$

on a

$$P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = xP(\mathbf{U}, \mathcal{A}) + yP(\mathbf{U}, \mathcal{B}) + zP(\mathbf{U}, \mathcal{C});$$

en posant

$$\mathbf{U} = x_0\mathcal{A} + y_0\mathcal{B} + z_0\mathcal{C},$$

nous aurons

$$(48) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P(\mathbf{U}, \mathcal{A}) = x_0P(\mathcal{A}, \mathcal{A}) + y_0P(\mathcal{B}, \mathcal{A}) + z_0P(\mathcal{C}, \mathcal{A}), \\ P(\mathbf{U}, \mathcal{B}) = x_0P(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + y_0P(\mathcal{B}, \mathcal{B}) + z_0P(\mathcal{C}, \mathcal{B}), \\ P(\mathbf{U}, \mathcal{C}) = x_0P(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + y_0P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + z_0P(\mathcal{C}, \mathcal{C}). \end{array} \right.$$

Nous serons dans le premier cas si les coefficients de $P(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ ne s'annulent jamais en même temps, c'est-à-dire si le déterminant

$$\begin{vmatrix} P(\mathcal{A}, \mathcal{A}) & P(\mathcal{B}, \mathcal{A}) & P(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \\ P(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & P(\mathcal{B}, \mathcal{B}) & P(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \\ P(\mathcal{A}, \mathcal{C}) & P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) & P(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \end{vmatrix},$$

symétrique par rapport à sa diagonale principale, n'est pas nul. Nous serons dans le second cas si les trois équations en x_0, y_0, z_0, obtenues en annulant $P(\mathbf{U}, \mathcal{A})$, $P(\mathbf{U}, \mathcal{B})$, $P(\mathbf{U}, \mathcal{C})$ se réduisent à deux distinctes, c'est-à-dire si le déterminant précédent est nul; sans qu'il en soit de même de ses mineurs à deux rangées. Enfin, nous serons dans le troisième cas si ces trois équations sont deux à deux équivalentes.

En résumé, le nombre des carrés indépendants est égal à l'ordre du déterminant principal du tableau des coefficients des seconds membres des formules (48).

71. Loi d'inertie. — Nous avons montré la part d'arbitraire à laquelle est soumise la décomposition. Soit en particulier une forme $Q(\mathbf{U})$ remplissant les conditions du 1er cas (n° 70). Pour la décomposer en carrés, il suffit de l'exprimer dans un système fondamental $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, formé par des vecteurs deux à deux conjugués. Dans l'expression obtenue, les coefficients sont précisément $Q(\mathcal{A})$, $Q(\mathcal{B})$, $Q(\mathcal{C})$. Voici en quoi consiste la loi d'inertie :

Quel que soit le système fondamental $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *de vecteurs deux à deux conjugués utilisé pour la décomposition, on trouvera toujours un nombre invariable de carrés précédés de coefficients positifs et un nombre invariable de carrés précédés de coefficients négatifs.*

Nous ne nous servirons de ce théorème que dans un cas particulier, celui où la forme Q(**V**) est constamment positive, et ne s'annule qu'avec le vecteur **V**. Pour cela, il est nécessaire que Q(**V**) s'exprime uniquement par des carrés à coefficients positifs. Il est indispensable en outre que ces carrés soient au nombre de trois et portent sur des formes linéaires indépendantes [sinon il existerait certains vecteurs **V** non nuls et susceptibles d'annuler Q(**V**)]. Dès qu'une telle propriété aura lieu pour un système fondamental déterminé, elle aura lieu pour les autres.

Quand une forme Q(**V**) remplit les conditions précédentes, on dit que cette forme est *définie et positive*.

72. Retour à la géométrie métrique. — En introduisant la notion de carré de la longueur d'un vecteur, nous avons supposé implicitement que cette expression est constamment positive et ne s'annule que si ce vecteur est lui-même nul. Autrement dit, nous complétons maintenant ce que nous avons dit au n° 68, par l'énoncé suivant :

Le carré de la longueur d'un vecteur est une forme quadratique, définie et positive de ce vecteur.

C'est à cette forme que nous donnons le nom de *forme fondamentale*. Désignons-la par Q(**U**).

La forme polaire P(**U**, **V**) fournit dès lors la valeur du produit scalaire **U**.**V**. Cela résulte immédiatement du rapprochement de la formule (47) et de celle qui donne le carré de la longueur de $\lambda\mathbf{U}+\mu\mathbf{V}$. Or, d'après les propriétés distributives du produit scalaire, ce carré est égal à

$$\lambda^2\mathbf{U}^2+2\lambda\mu\,\mathbf{U}.\mathbf{V}+\mu^2\mathbf{V}^2.$$

Cette expression est identique à $Q(\lambda\mathbf{U}+\mu\mathbf{V})$. Il suffit alors d'égaler les coefficients des termes en $\lambda\mu$ pour parvenir au résultat annoncé.

D'après cela, deux vecteurs orthogonaux sont tout simplement deux vecteurs conjugués par rapport à la forme fondamentale.

Il en résulte aussi la possibilité d'obtenir, à partir de l'égalité

$$\mathbf{OM}=x\mathbf{OA}+y\mathbf{OB}+z\mathbf{OC},$$

la formule générale (45). Nous avons en effet

$$\begin{aligned}Q(\mathbf{OM}) &= Q(x\mathbf{OA}+y\mathbf{OB}+z\mathbf{OC})\\ &= x^2Q(\mathbf{OA})+y^2Q(\mathbf{OB})+z^2Q(\mathbf{OC})+2yzP(\mathbf{OB},\mathbf{OC})+2zxP(\mathbf{OC},\mathbf{OA})\\ &\quad+2xyP(\mathbf{OA},\mathbf{OB}),\end{aligned}$$

égalité qui n'est autre que l'égalité (45) elle-même, puisque Q(**OA**), par exemple, signifie $\mathbf{OA}^2$ et que P(**OB**, **OC**) n'est autre que le produit scalaire **OB**.**OC**.

Toute forme quadratique Q nous aurait permis d'écrire la même relation. Mais si

nous voulons interdire à tout vecteur fini d'avoir une longueur nulle, ou même imaginaire, nous devons spécifier que Q est une forme définie et positive.

En résumé, pour constituer la géométrie métrique, il suffit d'ajouter aux notions primordiales de la géométrie linéaire et à ses postulats une nouvelle hypothèse : celle de l'existence d'une forme quadratique fondamentale de tout vecteur **V**, possédant le caractère invariant, cette forme étant astreinte à être définie et positive. On peut dire encore que la géométrie métrique se confond avec l'étude du sous-groupe de transformations linéaires laissant invariante cette forme quadratique.

Il est maintenant facile de comprendre que la géométrie euclidienne ne détient aucun privilège qui l'impose à la considération des mathématiciens d'une manière exclusive. Elle est construite sur un système particulier de concepts et de postulats. En variant ces données primordiales, on obtiendra d'autres systèmes géométriques, aussi logiques que le système euclidien. La suite nous en fournira des exemples. Mais, dès à présent, nous pouvons remarquer que la géométrie métrique et la géométrie linéaire sont deux systèmes distincts, quoique compatibles.

II

Applications de la multiplication scalaire.

73. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. — Considérons un trièdre OABC; appelons a, b, c ses faces et A, B, C ses dièdres. Pour obtenir le cosinus de la face a, il suffit de prendre sur OB et OC des vecteurs de longueur égale à l'unité, et de faire le produit scalaire de ces vecteurs. Appelons précisément B et C leurs extrémités, et projetons ces points orthogonalement en B′ et C′ sur l'arête OA. Nous aurons

$$\mathbf{OB} = \mathbf{OB'} + \mathbf{B'B} = \mathbf{OA} \cos c + \mathbf{B'B},$$
$$\mathbf{OC} = \mathbf{OC'} + \mathbf{C'C} = \mathbf{OA} \cos b + \mathbf{C'C};$$

en faisant le produit scalaire, il vient, puisque C′C et B′B sont perpendiculaires à OA,

$$\cos a = \cos b \cos c + \mathbf{B'B} . \mathbf{C'C}.$$

Les faces du trièdre OABC sont comprises entre 0 et π. Donc B′B et C′C ont pour longueurs respectives sin c et sin b. D'autre part, l'angle de B′B et de C′C est le rectiligne du dièdre A. Nous avons donc

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

74. Calcul des angles et des distances en coordonnées obliques. — Tous les calculs d'angles et de distances en coordonnées obliques peuvent s'opérer à l'aide de la seule notion de produit scalaire. C'est ce que nous allons montrer maintenant. Nous supposerons essentiellement, comme c'est l'usage

en géométrie analytique, que le système fondamental choisi a tous ses vecteurs de base égaux, leur longueur commune étant prise pour unité. Le principe de la méthode étant toujours le même, il nous suffira de traiter quelques exemples.

75. Distance d'un point à un plan. — Soient trois axes de coordonnées $Oxyz$ formant un trièdre dont les faces yOz, zOx, xOy ont des angles respectivement égaux à λ, μ, ν. Considérons le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et le plan P d'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Soit M le pied de la perpendiculaire abaissée de M_0 sur P. En désignant par x, y, z ses coordonnées, le vecteur M_0M aura pour composantes

$$X = x - x_0, \qquad Y = y - y_0, \qquad Z = z - z_0.$$

Pour trouver la longueur de ce vecteur, nous calculerons la forme quadratique fondamentale (n° 67). Puisque les vecteurs de base ont pour longueur 1, nous aurons ici

$$(49) \qquad \overline{M_0M}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda + 2ZX\cos\mu + 2XY\cos\nu.$$

Pour déterminer X, Y, Z, nous devons exprimer que le point M est dans le plan P, d'où la condition

$$(50) \qquad AX + BY + CZ + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

et que le vecteur M_0M est perpendiculaire au plan P, c'est-à-dire à tout vecteur de ce plan, ou d'un plan parallèle mené par l'origine. Il nous faut donc écrire que si les composantes u, v, w d'un vecteur satisfont à la relation

$$(51) \qquad Au + Bv + Cw = 0$$

(exprimant que ce vecteur est dans le plan parallèle à P mené par O), on a, de ce fait, orthogonalité du vecteur X, Y, Z et du vecteur u, v, w. Pour traduire cette condition, on part de la forme fondamentale, et on en déduit la forme polaire, qu'on annule. Cela donne

$$uX + vY + wZ + (vZ + wY)\cos\lambda + (wX + uZ)\cos\mu + (uY + vX)\cos\nu = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(52) \qquad \begin{aligned}(X + Z\cos\mu + Y\cos\nu)u + (Y + X\cos\nu + Z\cos\lambda)v \\ + (Z + Y\cos\lambda + X\cos\mu)w = 0.\end{aligned}$$

Il faut exprimer que (51) et (52) s'entraînent mutuellement. On en conclut

$$\frac{X + Y\cos\nu + Z\cos\mu}{A} = \frac{X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda}{B} = \frac{X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z}{C}.$$

Il est facile de trouver la valeur commune de ces rapports : pour cela, nous formerons un rapport égal à chacun d'eux en multipliant les deux termes du premier par X, ceux du second par Y, ceux du troisième par Z et ajoutant. Il nous vient, comme numérateur final, la forme quadratique fondamentale écrite au second membre de

(49), c'est-à-dire le carré d^2 de la distance cherchée et comme dénominateur $AX+BY+CZ$, dont la valeur nous est donnée par l'équation (50). La valeur commune ρ des trois rapports précédents est donc

$$\rho = \frac{-d^2}{Ax_0+By_0+Cz_0+D}.$$

Nous pouvons donc écrire, pour déterminer X, Y, Z, d^2, les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} X+Y\cos\nu+Z\cos\mu+\dfrac{Ad^2}{Ax_0+By_0+Cz_0+D}=0, \\ X\cos\nu+Y+Z\cos\lambda+\dfrac{Bd^2}{Ax_0+By_0+Cz_0+D}=0, \\ X\cos\mu+Y\cos\lambda+Z+\dfrac{Cd^2}{Ax_0+By_0+Cz_0+D}=0, \\ AX+BY+CZ+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{array}\right.$$

En éliminant X, Y, Z entre ces quatre équations, nous obtiendrons pour déterminer d^2 la suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & A \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & B \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & C \\ A & B & C & \left(\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{d}\right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

qui fournit immédiatement la valeur du rapport

$$\left(\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{d}\right)^2,$$

et par suite de la distance d. Le rapport ci-dessus s'exprime par une forme quadratique de A, B, C.

A un facteur numérique près, cette forme est d'ailleurs l'adjointe de la forme quadratique fondamentale (¹).

76. Plus courte distance de deux droites. — Soient les deux droites

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},$$
$$\frac{x-x_1}{a'}=\frac{y-y_1}{b'}=\frac{z-z_1}{c'}.$$

Par le point (x_0, y_0, z_0), menons un plan parallèle à la fois aux deux droites. Son équation sera de la forme

$$u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0)=0,$$

avec les deux conditions de parallélisme

$$au+bv+cw=0,$$
$$a'u+b'v+c'w=0.$$

(1) Voir par exemple mon *Cours de Géométrie analytique*, n° 246.

Donc ce plan a pour équation

$$(bc' - cb')(x - x_0) + (ca' - ac')(y - y_0) + (ab' - ba')(z - z_0) = 0.$$

Il suffira de chercher la distance du point (x_1, y_1, z_1) à ce plan d'après la théorie précédente. Il n'est pas utile de pousser le calcul plus avant.

77. Recherche d'un lieu géométrique particulier. — Soit encore à traiter la question suivante, qui fit en partie l'objet du problème de Spéciales posé à l'Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1921) :

On donne trois axes de coordonnées quelconques Ox, Oy, Oz, *et on considère une droite mobile qui détermine sur les plans* yOz, zOx, xOy *des points* A, B, C *dont les distances mutuelles demeurent invariables. Trouver le lieu d'un autre point* M *de cette droite, lié invariablement aux points* A, B, C.

Nous conserverons les notations λ, μ, ν pour désigner les faces du trièdre de coordonnées, et nous désignerons par **u** le vecteur unitaire de la droite mobile, par α, β, γ ses composantes. Nous pouvons poser

$$\mathbf{MA} = a\mathbf{u}, \qquad \mathbf{MB} = b\mathbf{u}, \qquad \mathbf{MC} = c\mathbf{u},$$

a, b, c étant des nombres algébriques constants, en vertu de l'invariabilité mutuelle des points A, B, C, M. Les composantes α, β, γ du vecteur **u** sont liées par une relation qui est la traduction de $u^2 = 1$, et qui fait intervenir la forme quadratique fondamentale :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu = 1. \tag{54}$$

En appelant x, y, z les coordonnées de M, celles du point M′ de la droite défini par la relation

$$\mathbf{MM'} = \rho\mathbf{u}$$

seront

$$x + \alpha\rho, \qquad y + \beta\rho, \qquad z + \gamma\rho.$$

Exprimons que lorsqu'on donne à ρ les valeurs respectives a, b, c, le point M′ décrit l'une des faces du trièdre. Nous aurons

$$x + a\alpha = 0, \qquad y + b\beta = 0, \qquad z + c\gamma = 0.$$

En éliminant α, β, γ entre ces trois relations et la relation (54), nous obtenons le lieu cherché, qui est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{yz}{bc}\cos\lambda + 2\frac{zx}{ca}\cos\mu + 2\frac{xy}{ab}\cos\nu = 1.$$

Laissant de côté les exemples particuliers, nous allons maintenant examiner d'autres applications de la notion de produit scalaire, d'un caractère plus général.

78. Les deux modes de détermination d'un vecteur dans un système fondamental quelconque. — Soit un système fondamental absolument quelconque **OA, OB, OC**. Jusqu'à présent, nous n'avons fait connaître qu'un seul mode de détermination des vecteurs, applicable tant à la géométrie

linéaire qu'à la géométrie métrique. Il consistait à exprimer le vecteur **V** à déterminer sous la forme

$$\mathbf{V} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}; \tag{55}$$

les nombres x, y, z constituent, dans ce premier mode, les composantes du vecteur. Mais, si l'on fait de la géométrie métrique (et seulement dans ce cas) on peut également définir le vecteur **V** d'une autre manière. Supposons donnés les trois produits scalaires :

$$\mathbf{V}.\mathbf{OA} = \xi, \qquad \mathbf{V}.\mathbf{OB} = \eta, \qquad \mathbf{V}.\mathbf{OC} = \zeta.$$

La donnée de ξ, η, ζ fait connaître en grandeur et en signe les projections de **V** sur **OA**, **OB**, **OC** (ou sur les axes de même support et de même sens). On a donc un second mode de détermination du vecteur **V**, qui est, à l'encontre du premier, exclusivement métrique.

Il est d'ailleurs facile de trouver les relations qui existent entre les quantités x, y, z et ξ, η, ζ. A cet effet, multiplions scalairement les deux membres de l'égalité (55) par **OA**, **OB**, **OC**. Il vient

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x\mathbf{OA}^2 + y\mathbf{OA}.\mathbf{OB} + z\mathbf{OA}.\mathbf{OC}, \\ \eta &= x\mathbf{OB}.\mathbf{OA} + y\mathbf{OB}^2 + z\mathbf{OB}.\mathbf{OC}, \\ \zeta &= x\mathbf{OC}.\mathbf{OA} + y\mathbf{OC}.\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}^2. \end{aligned}\right. \tag{56}$$

ξ, η, ζ sont donc des formes linéaires en x, y, z qui empruntent leurs coefficients à la forme fondamentale elle-même : en effet, en vertu de la formule (45), le carré l^2 de la longueur de **V** est donné par

$$l^2 = x^2\mathbf{OA}^2 + y^2\mathbf{OB}^2 + z^2\mathbf{OC}^2 + 2yz\mathbf{OB}.\mathbf{OC} + 2zx\mathbf{OC}.\mathbf{OA} + 2xy\mathbf{OA}.\mathbf{OB};$$

en écrivant l^2 sous la forme

$$l^2 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a_1yz + 2b_1zx + 2c_1xy = \varphi(x, y, z), \tag{57}$$

nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= ax + c_1y + b_1z = \frac{1}{2}\varphi'_x, \\ \eta &= c_1x + by + a_1z = \frac{1}{2}\varphi'_y, \\ \zeta &= b_1x + a_1y + cz = \frac{1}{2}\varphi'_z. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Ainsi, ξ, η, ζ se déduisent de x, y, z en prenant les demi-dérivées partielles de la forme quadratique fondamentale, exprimée en x, y, z.

On peut remarquer que l'on a

$$x\xi + y\eta + z\zeta = l^2; \tag{59}$$

cette relation se vérifie immédiatement, soit qu'on y remplace ξ, η, ζ par **OA.OM**, **OB.OM** et **OC.OM** respectivement et qu'on tienne compte de (55), soit encore qu'on les remplace par $\frac{1}{2}\varphi'_x$, $\frac{1}{2}\varphi'_y$, $\frac{1}{2}\varphi'$ et qu'on fasse appel à l'identité d'Euler.

Les formes φ'_x, φ'_y, φ'_z sont d'ailleurs nécessairement indépendantes, sans quoi, en vertu de (59), la quantité l^2 pourrait s'annuler pour des vecteurs non nuls. Donc le *discriminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c_1 & b_1 \\ c_1 & b & a_1 \\ b_1 & a_1 & c \end{vmatrix}$$

de la forme fondamentale n'est pas nul. On peut donc résoudre les équations (58), et en tirer pour x, y, z des formes linéaires en ξ, η, ζ; en portant ces expressions dans $\varphi(x, y, z)$ on obtiendra pour l^2 une nouvelle forme quadratique en ξ, η, ζ,

$$l^2 = f(\xi, \eta, \zeta).$$

Nous aurons d'ailleurs, d'après le théorème des fonctions composées,

$$\varphi'_x = f'_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + f'_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + f'_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

et deux équations analogues. Or, ce système s'écrit encore

$$\begin{aligned} \varphi'_x &= a\, f'_\xi + c_1 f'_\eta + b_1 f'_\zeta, \\ \varphi'_y &= c_1 f'_\xi + b\, f'_\eta + a_1 f'_\zeta, \\ \varphi'_z &= b_1 f'_\xi + a_1 f'_\eta + c\, f'_\zeta. \end{aligned}$$

Comparons-le au système (58). L'hypothèse $\Delta \neq 0$ entraîne nécessairement

$$(60) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} f'_\xi, \\ y &= \frac{1}{2} f'_\eta, \\ z &= \frac{1}{2} f'_\zeta. \end{aligned} \right.$$

Les relations (58) et (60) montrent le rôle réciproque joué par les deux formes quadratiques

$$\varphi(x, y, z) \qquad \text{et} \qquad f(\xi, \eta, \zeta),$$

qui sont égales l'une et l'autre au carré du vecteur **V**. On dit que ces formes quadratiques sont ADJOINTES.

On peut donner à cette réciprocité un caractère plus saillant, en montrant qu'il est possible de déterminer un second système fondamental $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$, dans lequel tout vecteur a précisément pour composantes du premier mode des valeurs égales à celles du second mode dans le système **OA**, **OB**, **OC** et inversement. Dans ce dernier, écrivons les composantes du premier mode des vecteurs fondamentaux. Ce sont respectivement

1, 0, 0 pour **OA**,
0, 1, 0 pour **OB**,
0, 0, 1 pour **OC**.

La condition énoncée exige donc que l'on ait

$$\mathbf{OA}_1.\mathbf{OA}=1,\qquad \mathbf{OA}_1.\mathbf{OB}=0,\qquad \mathbf{OA}_1.\mathbf{OC}=0,$$
$$\mathbf{OB}_1.\mathbf{OA}=0,\qquad \mathbf{OB}_1.\mathbf{OB}=1,\qquad \mathbf{OB}_1.\mathbf{OC}=0,$$
$$\mathbf{OC}_1.\mathbf{OA}=0,\qquad \mathbf{OC}_1.\mathbf{OB}=0,\qquad \mathbf{OC}_1.\mathbf{OC}=1.$$

D'ailleurs, ces neuf égalités suffisent à l'assurer. Il est clair en effet que si l'on a

$$\mathbf{V}=\xi\,\mathbf{OA}_1+\eta\,\mathbf{OB}_1+\zeta\,\mathbf{OC}_1,$$

il en résultera

$$\mathbf{V}.\mathbf{OA}=\xi,\qquad \mathbf{V}.\mathbf{OB}=\eta,\qquad \mathbf{V}.\mathbf{OC}=\zeta.$$

Les deux formes quadratiques fondamentales, dans les deux systèmes **OA**, **OB**, **OC** d'une part et $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$ de l'autre, seront respectivement les deux adjointes :

$$\varphi(x,\ y,\ z)\qquad \text{et}\qquad f(\xi,\ \eta,\ \zeta).$$

Géométriquement, il est facile d'étudier la disposition mutuelle de ces deux systèmes. Dans le tableau des neuf égalités précédentes, envisageons la première ligne : sur les trois égalités qu'elle renferme, les deux dernières expriment que OA_1 est perpendiculaire au plan OBC, et la première que le point A_1 est dans le plan polaire du point A par rapport à la sphère de centre O et de rayon un. Donc OA_1 et OA sont d'un même côté du plan OBC. En interprétant de la même manière les autres égalités, on voit ainsi que le trièdre $OA_1B_1C_1$ est supplémentaire du trièdre OABC. Les couples de points (A_1, A), (B_1, B), (C_1, C) sont conjugués par rapport à la sphère de centre O et de rayon un. Nous dirons que deux systèmes tels que $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$ et **OA**, **OB**, **OC** sont *réciproques*.

Si le système **OA**, **OB**, **OC** est trirectangle, $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$ deviennent respectivement colinéaires à **OA**, **OB**, **OC**, et de même sens, leurs longueurs étant égales aux inverses de **OA**, **OB**, **OC**. Enfin, tout système orthogonal et normal est son propre réciproque (1).

79. Variances contrariées. — Complétons ici, sous certains rapports, la théorie du changement de coordonnées. Imaginons qu'aux vecteurs fondamentaux **OA**, **OB**, **OC** considérés initialement, on substitue un nouveau système $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$. Alors aux nombres

$$x,\ y,\ z\qquad \text{et}\qquad \xi,\ \eta,\ \zeta,$$

qui sont les composantes des deux modes d'un vecteur **V**, nous devrons en substituer d'autres

$$x_1,\ y_1,\ z_1\qquad \text{et}\qquad \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,$$

et nous aurons nécessairement

$$x\xi+y\eta+z\zeta=x_1\xi_1+y_1\eta_1+z_1\zeta_1, \tag{61}$$

(1) Pour apercevoir, en géométrie linéaire, le même phénomène de dualité, il convient d'introduire à côté du concept de vecteur libre, celui de doublet, ou système de deux plans parallèles défini à une translation près, qui concrétise la notion de forme linéaire d'un vecteur, voyez n° 142 et note I, à la fin de ce volume.

puisque la valeur commune des deux membres est égale à l^2. Nous aurons d'autre part

$$(62) \qquad x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC} = x_1\mathbf{OA}_1 + y_1\mathbf{OB}_1 + z_1\mathbf{OC}_1,$$

puisque la grandeur vectorielle est, pour l'un et l'autre membre, celle de **V**. Écrivons alors les formules qui définissent $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$ en fonction de **OA**, **OB**, **OC**.

$$(63) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{OA}_1 = a'\ \mathbf{OA} + b'\ \mathbf{OB} + c'\ \mathbf{OC}, \\ \mathbf{OB}_1 = a''\ \mathbf{OA} + b''\ \mathbf{OB} + c''\ \mathbf{OC}, \\ \mathbf{OC}_1 = a'''\mathbf{OA} + b'''\mathbf{OB} + c'''\mathbf{OC}; \end{array}\right.$$

en portant ces valeurs dans le second membre de (62), celui-ci deviendra linéaire en **OA**, **OB**, **OC** et une identification fournira x, y, z en fonction de x_1, y_1, z_1.

Cela posé, envisageons systématiquement, et indépendamment des éléments auxquels on les applique :

1° La substitution linéaire qui fait passer de **OA**, **OB**, **OC** à $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$. Ces équations sont écrites plus haut et appliquées à une transformation de vecteurs. Mais on pourrait aussi bien appliquer cette substitution à trois scalaires u, v, w pour en déduire trois autres scalaires u_1, v_1, w_1. C'est la substitution prise en elle-même qui nous intéresse, et nous pouvons nous borner à la représenter par le tableau

$$\begin{array}{ccc} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c'''; \end{array}$$

2° La substitution linéaire qui fait passer de x, y, z à x_1, y_1, z_1;

3° La substitution linéaire qui fait passer de ξ, η, ζ à ξ_1, η_1, ζ_1.

Prenons de ces substitutions la première et la dernière. Elles sont liées l'une et l'autre à la seconde de manière que l'expression

$$x\xi + y\eta + z\zeta$$

pour l'une, et que l'expression

$$x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}$$

pour l'autre, restent finalement invariantes. Cette double propriété d'invariance les détermine l'une et l'autre, d'une manière unique, en fonction de la seconde substitution; en effet, nous savons que celle-ci, appliquée aux éléments x, y, z, se traduira par les formules

$$(64) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = a'x_1 + a''y_1 + a'''z_1, \\ y = b'x_1 + b''y_1 + b'''z_1, \\ z = c'x_1 + c''y_1 + c'''z_1; \end{array}\right.$$

et inversement ces formules entraînent les formules (63) et aussi les suivantes :

$$(65) \qquad \left\{\begin{array}{l} \xi_1 = a'\ \xi + b'\ \eta + c'\ \zeta, \\ \eta_1 = a''\ \xi + b''\ \eta + c''\ \zeta, \\ \zeta_1 = a'''\xi + b'''\eta + c'''\zeta. \end{array}\right.$$

Donc c'est une seule et même substitution qui fait passer de **OA**, **OB**, **OC** à $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OB}_1$, $\mathbf{OC}_1$ et de ξ, η, ζ à ξ_1, η_1, ζ_1. Nous pourrons donc énoncer le résultat suivant :

Les coordonnées ξ, η, ζ *du second type et les vecteurs fondamentaux* **OA**, **OB**, **OC** *ont le même mode de variance* [1].

Pour cette raison, on dit que ξ, η, ζ sont les coordonnées *covariantes* du vecteur **V**.

Remarquons maintenant la relation de réciprocité qui existe entre la substitution qui fait passer de x, y, z à x_1, y_1, z_1 avec la substitution considérée la première (ou la dernière). Cette réciprocité se déduit de la comparaison des formules (63) et (64). On passe en effet des unes aux autres en accordant la priorité tantôt aux éléments munis d'indices, tantôt aux éléments qui en sont dépourvus, et en écrivant tantôt un tableau carré, tantôt le symétrique de ce tableau par rapport à sa diagonale.

Donc les coordonnées x, y, z du premier type ont un mode de variance distinct de celui des vecteurs fondamentaux (ou de celui des ξ, η, ζ). Mais, ainsi que nous l'avons dit, ces modes de variance simultanés sont tels que l'expression

$$(66) \qquad x\xi + y\eta + z\zeta$$

ne soit pas troublée. En empruntant à la statique une comparaison familière, nous pouvons dire que l'expression (66) évoque l'idée d'un solide soumis à l'action de deux forces simultanées, et dont l'équilibre ne serait pas troublé. On dit souvent que ces forces se contrarient. Aux forces, nous devons substituer ici les modes de variance, et nous dirons encore que ces modes se contrarient.

Puisque **OA**, **OB**, **OC** d'une part, et x, y, z d'autre part, ont des variances contrariées, x, y, z sont appelées les *coordonnées contrevariantes* du vecteur **V**. Dans certaines questions, il y a avantage à introduire à la fois les coordonnées contrevariantes et les coordonnées covariantes d'un même vecteur. Considérons deux vecteurs **V** et $\mathbf{V}_1$ et leurs composantes des deux modes : elles satisfont aux relations fondamentales

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{V} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}, & \mathbf{V}_1 = x_1\mathbf{OA} + y_1\mathbf{OB} + z_1\mathbf{OC}, \\ \mathbf{V}.\mathbf{OA} = \xi, & \mathbf{V}_1.\mathbf{OA} = \xi_1, \\ \mathbf{V}.\mathbf{OB} = \eta, & \mathbf{V}_1.\mathbf{OB} = \eta_1, \\ \mathbf{V}.\mathbf{OC} = \zeta, & \mathbf{V}_1.\mathbf{OC} = \zeta_1. \end{array}$$

Proposons-nous de calculer le produit scalaire $\mathbf{V}.\mathbf{V}_1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{V}.\mathbf{V}_1 &= x_1\mathbf{V}.\mathbf{OA} + y_1\mathbf{V}.\mathbf{OB} + z_1\mathbf{V}.\mathbf{OC} = x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta, \\ &= x\mathbf{V}_1.\mathbf{OA} + y\mathbf{V}_1.\mathbf{OB} + z\mathbf{V}_1.\mathbf{OC} = x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1. \end{aligned}$$

La condition d'orthogonalité de **V** et de $\mathbf{V}_1$ pourra donc s'écrire indifféremment

$$x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1 = 0,$$

ou

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta = 0.$$

(1) Cet énoncé est encore une conséquence des relations $\xi = \mathbf{V}.\mathbf{OA}$, $\eta = \mathbf{V}.\mathbf{OB}$, $\zeta = \mathbf{V}.\mathbf{OC}$.

Supposons en particulier que, suivant l'usage adopté couramment en géométrie analytique, **OA, OB, OC** aient pour longueur l'unité. Considérons le plan défini par l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

le plan parallèle mené par l'origine est

$$AX + BY + CZ = 0.$$

Cette nouvelle relation exprime l'orthogonalité entre un vecteur parallèle au plan et de composantes contrevariantes X, Y, Z et un vecteur de composantes covariantes A, B, C. Donc la normale au plan est le vecteur de composantes covariantes A, B, C. Ceci nous explique l'intervention de la forme quadratique adjointe de la forme fondamentale dans l'expression du carré de la distance d'un point à un plan. En reprenant les raisonnements du n° 75, le lecteur pourra voir que nous avons fait un appel exclusif aux composantes contrevariantes X, Y, Z du vecteur M_0M. Pour exprimer qu'il est normal au plan, il nous a fallu écrire qu'il a même direction que le vecteur dont les composantes covariantes sont A, B, C. Or les composantes covariantes du vecteur x, y, z s'obtiennent, en vertu des formules (58), en prenant les demi-dérivées partielles de la forme fondamentale (49). Nous avons donc été amenés à écrire

$$\frac{X + Y\cos\nu + Z\cos\mu}{A} = \frac{X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda}{B} = \frac{X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z}{C},$$

c'est-à-dire à écrire deux des équations qui servent à effectuer le passage de la forme fondamentale à la forme adjointe.

Remarquons enfin que le système fondamental est à la fois orthogonal et normal, il n'y a plus lieu de distinguer entre les composantes contrevariantes et les composantes covariantes.

80. Évaluation des volumes en géométrie métrique. — La définition du volume, telle que nous l'avons donnée en géométrie linéaire, s'applique sans modification à la géométrie métrique. Toutefois, dans cette dernière, il est indiqué de prendre comme unité de volume celui du cube dérivant d'un système fondamental, orthogonal, normal et direct. Soit **OI**, **OJ**, **OK** un tel système. Cherchons à évaluer (**OA**, **OB**, **OC**), sachant que l'on a

$$\begin{aligned} \mathbf{OA} &= a_1\mathbf{OI} + a_2\mathbf{OJ} + a_3\mathbf{OK}, \\ \mathbf{OB} &= b_1\mathbf{OI} + b_2\mathbf{OJ} + b_3\mathbf{OK}, \\ \mathbf{OC} &= c_1\mathbf{OI} + c_2\mathbf{OJ} + c_3\mathbf{OK}. \end{aligned}$$

Nous avons établi la formule

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\mathbf{OI}, \mathbf{OJ}, \mathbf{OK}).$$

Le volume qui figure au second membre étant pris pour unité, nous obtenons finalement, comme expression du volume cherché,

$$v = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

déterminant dont les éléments désignent indifféremment les composantes du premier ou du second mode des vecteurs **OA**, **OB**, **OC**, puisque le système fondamental est orthogonal et normal. A la formule précédente, on pourrait substituer la suivante :

$$(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC})\,(\mathbf{OI}, \mathbf{OJ}, \mathbf{OK}) = \begin{vmatrix} \mathbf{OA}.\mathbf{OI} & \mathbf{OA}.\mathbf{OJ} & \mathbf{OA}.\mathbf{OK} \\ \mathbf{OB}.\mathbf{OI} & \mathbf{OB}.\mathbf{OJ} & \mathbf{OB}.\mathbf{OK} \\ \mathbf{OC}.\mathbf{OI} & \mathbf{OC}.\mathbf{OJ} & \mathbf{OC}.\mathbf{OK} \end{vmatrix},$$

qui a l'avantage d'être vraie, non plus seulement lorsque le système **OI**, **OJ**, **OK** est orthogonal et normal, mais dans tous les cas possibles, comme il résulte de la règle de multiplication des déterminants [1]. Appliquons en particulier cette dernière formule, en supposant que **OI**, **OJ**, **OK** coïncident respectivement avec OA, OB, OC. Désignons par a, b, c les longueurs de ces trois vecteurs et posons

$$\widehat{BOC} = \lambda, \qquad \widehat{COA} = \mu, \qquad \widehat{AOB} = \nu.$$

Il vient

$$v^2 = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

III

Étude des transformations linéaires, au point de vue métrique.

81. Position du problème. — Du point de vue de la géométrie linéaire, il n'y a pas lieu d'établir de distinction entre les transformations linéaires, si l'on considère exclusivement celles dont le déterminant n'est pas nul.

Il en est autrement dans le domaine métrique. Soient deux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}_1$: imaginons une transformation linéaire qui leur fasse correspondre deux nouveaux vecteurs $\mathbf{V}'$ et $\mathbf{V}'_1$. L'hypothèse

$$\mathbf{V}.\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}'.\mathbf{V}'_1 \tag{68}$$

étendue à tous les couples ($\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}_1$) nous a déjà donné une classe remarquable de transformations linéaires : ce sont les *transformations métriques*.

Pour pousser plus avant l'étude de la question, nous considérerons le produit scalaire $\mathbf{V}.\mathbf{V}'_1$ et nous ferons la remarque essentielle suivante :

(1) Moyennant la réserve suivante : on prend comme unité de volume le volume du cube construit sur l'unité de longueur.

Ce produit scalaire est une forme bilinéaire des deux vecteurs arbitraires $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{V}_1$, *et la donnée de cette forme bilinéaire est équivalente à celle de la transformation* (envisagée comme transformation de vecteurs, au sens du n° 54).

Pour établir ce point, considérons trois vecteurs fondamentaux $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, dont les transformés sont respectivement $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$. Aux vecteurs

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}_1 = x_1\mathcal{A} + y_1\mathcal{B} + z_1\mathcal{C}$$

correspondront respectivement les vecteurs

$$\mathbf{V}' = x\mathcal{A}' + y\mathcal{B}' + z\mathcal{C}' \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}'_1 = x_1\mathcal{A}' + y_1\mathcal{B}' + z_1\mathcal{C}'.$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) = \mathbf{V}.\mathbf{V}'_1 &= (x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}).(x_1\mathcal{A}' + y_1\mathcal{B}' + z_1\mathcal{C}') \\ &= xx_1\mathcal{A}.\mathcal{A}' + xy_1\mathcal{A}.\mathcal{B}' + xz_1\mathcal{A}.\mathcal{C}' \\ &+ yx_1\mathcal{B}.\mathcal{A}' + yy_1\mathcal{B}.\mathcal{B}' + yz_1\mathcal{B}.\mathcal{C}' \\ &+ zx_1\mathcal{C}.\mathcal{A}' + zy_1\mathcal{C}.\mathcal{B}' + zz_1\mathcal{C}.\mathcal{C}', \end{aligned}$$

calcul que l'on peut interpréter de la manière suivante : la forme χ a justement pour coefficients les neuf produits scalaires

$$\begin{matrix} \mathcal{A}.\mathcal{A}', & \mathcal{A}.\mathcal{B}', & \mathcal{A}.\mathcal{C}', \\ \mathcal{B}.\mathcal{A}', & \mathcal{B}.\mathcal{B}', & \mathcal{B}.\mathcal{C}', \\ \mathcal{C}.\mathcal{A}', & \mathcal{C}.\mathcal{B}', & \mathcal{C}.\mathcal{C}', \end{matrix}$$

c'est-à-dire les coordonnées covariantes de $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ dans le système $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Se donner les neuf coefficients de cette forme, c'est aussi donner les transformés $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ou, en fin de compte, la transformation elle-même. Et réciproquement.

Cette remarque très simple nous conduit immédiatement aux conséquences suivantes.

1° Considérons une forme bilinéaire $\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1)$ non symétrique. Cette forme et la forme $\chi(\mathbf{V}_1, \mathbf{V})$ engendrent deux transformations linéaires distinctes, mais en liaison *réciproque*. Nous dirons que ces transformations sont *métriquement associées.*

2° A une forme bilinéaire $\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1)$ symétrique en $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}_1$, c'est-à-dire à la forme polaire d'une forme quadratique $\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = q(\mathbf{V})$, correspond une transformation linéaire qui est sa propre associée. Nous dirons qu'une telle transformation est *autométrique* et que $q(\mathbf{V})$ est *la forme quadratique attachée* à cette transformation.

82. Traduction analytique des hypothèses précédentes. — Nous supposerons toujours, dans la suite, que le système fondamental $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ est à la fois orthogonal et normal. Dans ce système, il n'y a donc pas à distinguer entre les composantes covariantes et les composantes contrevariantes. Supposons données ces dernières, pour les vecteurs $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$:

$$(69) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}' = a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{B} + a_3\mathcal{C}, \\ \mathcal{B}' = b_1\mathcal{A} + b_2\mathcal{B} + b_3\mathcal{C}, \\ \mathcal{C}' = c_1\mathcal{A} + c_2\mathcal{B} + c_3\mathcal{C}. \end{cases}$$

Au vecteur

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}$$

correspond, dans une telle transformation, le vecteur

$$\mathbf{V}' = x\mathcal{A}' + y\mathcal{B}' + z\mathcal{C}' = x(a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{B} + a_3\mathcal{C}) + \ldots$$

qui, dans le système $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, a pour composantes

$$(70)\qquad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z. \end{cases}$$

En vertu de l'identité des composantes covariantes et contrevariantes, nous avons

$$\begin{aligned}(71)\quad \chi(\mathbf{V},\mathbf{V}_1) &= a_1xx_1 + b_1xy_1 + c_1xz_1 + a_2yx_1 + b_2yy_1 + c_2yz_1 + a_3zx_1 + b_3zy_1 + c_3zz_1 \\ &= x(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1) + y(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1) + z(a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1) \\ &= x_1(a_1x + a_2y + a_3z) + y_1(b_1x + b_2y + b_3z) + z_1(c_1x + c_2y + c_3z).\end{aligned}$$

Pour passer de $\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1)$ à $\chi(\mathbf{V}_1, \mathbf{V})$, il suffit, dans le tableau des coefficients des formules (70), d'échanger le rôle des lignes et celui des colonnes. Donc si une transformation linéaire fait correspondre au vecteur (x, y, z) le vecteur (x', y', z') défini par les formules (70), la transformation métriquement associée fera correspondre au vecteur (x, y, z) le vecteur (x'', y'', z''), défini par les formules

$$(70\ bis)\qquad \begin{cases} x'' = a_1x + a_2y + a_3z, \\ y'' = b_1x + b_2y + b_3z, \\ z'' = c_1x + c_2y + c_3z. \end{cases}$$

Une transformation autométrique sera donc caractérisée par des formules comme les suivantes :

$$(72)\qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \gamma_1 y + \beta_1 z, \\ y' = \gamma_1 x + \beta y + \alpha_1 z, \\ z' = \beta_1 x + \alpha_1 y + \gamma z, \end{cases}$$

dont les seconds membres donnent naissance à un tableau de coefficients symétrique par rapport à sa diagonale.

Il était important de signaler ces caractères très simples, qui s'appliquent, sans modification d'énoncé, lorsqu'on suppose la transformation déterminée par les relations (69), qui définissent les vecteurs transformés des trois vecteurs fondamentaux.

Ajoutons à cela une remarque importante. Considérons la transformation autométrique, définie par les équations (72). La forme $\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1)$ devient, dans ce cas particulier,

$$\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) = \alpha xx_1 + \beta yy_1 + \gamma zz_1 + \alpha_1(y_1z + z_1y) + \beta_1(z_1x + x_1z) + \gamma_1(x_1y + y_1x).$$

La forme quadratique attachée à cette transformation sera donc

$$q(\mathbf{V}) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\alpha_1 yz + 2\beta_1 zx + 2\gamma_1 xy.$$

Les composantes x', y', z' du transformé de **V** sont précisément les demi-dérivées partielles de cette forme quadratique.

83. Directions principales d'une transformation autométrique. — Soit la transformation autométrique dérivée de la forme quadratique $q(\mathbf{V})$. Appelons $Q(\mathbf{V})$ la forme métrique fondamentale, par laquelle s'exprime le carré de la longueur de **V**. Supposons que l'on ait identiquement

$$q(\mathbf{V}) = \rho Q(\mathbf{V}), \tag{71}$$

ρ désignant un certain coefficient scalaire. Nous aurions, en prenant les formes polaires,

$$\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) = \mathbf{V}.\mathbf{V}'_1 = \rho \mathbf{V}.\mathbf{V}_1,$$

d'où

$$\mathbf{V}'_1 = \rho \mathbf{V}_1,$$

La transformation n'aurait alors pour effet de remplacer chaque vecteur que par un vecteur colinéaire et proportionnel.

Prenons maintenant une transformation autométrique absolument quelconque, et cherchons s'il existe des vecteurs auxquels elle fasse correspondre des vecteurs parallèles. Nous dirons que les directions de ces vecteurs sont *principales* pour la transformation, ou, si l'on préfère, pour la forme quadratique $q(\mathbf{V})$. Dans l'hypothèse particulière (71), toute direction serait principale, et le coefficient de proportionnalité ρ serait le même pour toutes les directions.

Il sera commode d'établir la propriété suivante :

Deux directions principales, douées de coefficients de proportionnalité distincts, sont orthogonales; et deux directions principales, non orthogonales, ont même coefficient.

En effet, représentons le transformé d'un vecteur quelconque par la même lettre accentuée, et supposons qu'on ait à la fois

$$\mathbf{U}' = \lambda \mathbf{U} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}' = \mu \mathbf{V},$$

les quantités λ et μ étant distinctes. Puisque la transformation est autométrique, nous aurons

$$\mathbf{U}'.\mathbf{V} = \mathbf{U}.\mathbf{V}',$$

d'où

$$(\lambda - \mu)\mathbf{U}.\mathbf{V} = 0.$$

Donc, ou bien λ et μ sont distincts, comme nous l'avons supposé, et alors **U** et **V** seront nécessairement orthogonaux, ou bien nous devons avoir $\lambda = \mu$.

(C. Q. F. D.)

Puisque nous sommes dans l'espace à trois dimensions, on en conclut à l'impossibilité de plus de trois directions principales douées de coefficients distincts. En admettant leur existence, ces droites seraient alors parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle : aucune autre direction ne saurait être principale, sinon dans chacun des plans qu'elle détermine avec les trois précédentes, toute direction serait principale, et le coefficient de proportionnalité de la nouvelle direction devrait égaler ceux des trois premières.

Avant d'aborder la recherche systématique des directions principales, nous ferons encore les remarques suivantes :

1° *Toutes les formes quadratiques*

$$q_s(\mathbf{V}) = q(\mathbf{V}) - sQ(\mathbf{V})$$

ont mêmes directions principales que $q(\mathbf{V})$. *Car si la transformation dérivant de* $q(\mathbf{V})$ *change* $\mathbf{V}$ *en* $\mathbf{V}'$, *celle qui dérive de* $q_s(\mathbf{V})$ *changera* $\mathbf{V}$ *en* $\mathbf{V}' - s\mathbf{V}$.

Le bénéfice de cette constatation va résider dans la présence de transformations dégénérées, parmi celles qui dérivent de $q_s(\mathbf{V})$. Or, pour ces dernières, le problème de la recherche des directions principales est facilité, car on en connaît en général une solution (et, dans tous les cas, au moins une). Nous aurons donc à dire quelques mots des transformations dégénérées.

2° De la définition même des transformations autométriques, il résulte que *si une direction* Δ *est principale, le transformé d'un vecteur orthogonal à* Δ *est un nouveau vecteur orthogonal à* Δ.

84. Transformations linéaires dégénérées. — Considérons une correspondance linéaire entre vecteurs, qui transforme les vecteurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ d'un certain système fondamental en trois vecteurs $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, définis par les formules

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= a_1\mathcal{A} + a_2\mathcal{B} + a_3\mathcal{C}, \\ \mathcal{B}' &= b_1\mathcal{A} + b_2\mathcal{B} + b_3\mathcal{C}, \\ \mathcal{C}' &= c_1\mathcal{A} + c_2\mathcal{B} + c_3\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé que le déterminant de cette transformation

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

n'est pas nul. Il s'agit alors d'une transformation véritable : nous dirons aussi *transformation spatiale*.

Lorsque Δ est nul, la transformation est dégénérée. En géométrie à trois dimensions, il se présente deux cas de dégénérescence :

1° Du tableau formé par Δ, on peut extraire un déterminant principal d'ordre deux. Les vecteurs

$$x\mathcal{A}' + y\mathcal{B}' + z\mathcal{C}'$$

sont alors tous coplanaires. Nous dirons dans ce cas que la transformation est *planaire*.

2° Le déterminant principal est d'ordre égal à l'unité. Tous les vecteurs

$$x\mathcal{A}' + y\mathcal{B}' + z\mathcal{C}'$$

sont alors colinéaires. Nous dirons dans ce cas que la transformation est *rectiligne*.

Nous démontrerons encore le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsqu'une transformation est spatiale, à tout vecteur non nul correspond un vecteur non nul. Si elle est dégénérée, il existe une infinité*

de vecteurs non nuls donnant naissance à un vecteur nul : ils sont colinéaires pour une transformation planaire, et coplanaires pour une transformation rectiligne.

En effet, pour qu'un vecteur

$$x\mathcal{A}' + y\mathcal{B}' + z\mathcal{C}'$$

soit nul, il faut et il suffit que ses composantes dans le système $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ soient nulles, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0. \end{aligned}$$

Nous sommes amenés à discuter ce système, d'après les règles générales des nos 46 et suivants. Si $\Delta \neq 0$, la seule solution est $x = y = z = 0$. Si le déterminant principal est d'ordre deux, ces trois équations se réduisent à deux distinctes, et si x_0, y_0, z_0 est une solution particulière, toute autre solution est de la forme λx_0, λy_0, λz_0, les vecteurs obtenus sont colinéaires. Enfin, si le déterminant principal est d'ordre un, nos équations sont équivalentes à l'une d'entre elles, et nos conditions seront satisfaites par une famille de vecteurs coplanaires.

(C. Q. F. D.)

85. Discriminant d'une forme quadratique $q(\mathbf{V})$. — Considérons une forme quadratique $q(\mathbf{V})$ et la transformation autométrique qui en dérive. Le déterminant Δ de cette transformation s'appelle le *discriminant* de la forme $q(\mathbf{V})$: c'est un invariant métrique, puisqu'il représente le rapport de deux volumes correspondants et puisque la forme $q(\mathbf{V})$ est elle-même métriquement liée à la transformation.

Si Δ est $\neq 0$, la transformation sera du type spatial. Si Δ est nul, nous aurons une transformation dégénérée, du type planaire ou du type rectiligne, suivant l'ordre du déterminant principal [1].

Étant donnée une transformation autométrique spatiale ou dégénérée, nous devrons appeler directions principales celles des vecteurs $\mathbf{V}$ liés à leurs transformés $\mathbf{V}'$ par une relation de la forme

$$\mathbf{V}' = \lambda \mathbf{V},$$

c'est-à-dire celles des vecteurs $\mathbf{V}$ qui donnent naissance à un vecteur parallèle *ou à un vecteur nul*. Cette dernière circonstance ne pouvait pas se présenter pour les transformations spatiales.

86. Directions principales d'une transformation autométrique dégénérée. — Il y a lieu de distinguer entre les transformations dégénérées celles qui sont planaires et celles qui sont rectilignes.

Si la transformation est planaire, elle admet comme direction principale, douée d'un coefficient λ nul, *la direction orthogonale au plan de dégénérescence.* — En effet, soit un vecteur $\mathbf{N}$, dont le transformé est le vecteur *zéro*. Appelons $\mathbf{V}$

(1) L'ordre de ce déterminant est égal au nombre des carrés indépendants de la forme $q(\mathbf{V})$ (cf. la fin du n° 70).

un vecteur quelconque, ayant pour transformé un vecteur **V**′ non nul, mais parallèle au plan P de dégénérescence. Par suite de la définition des transformations autométriques, nous avons

$$\mathbf{N}.\mathbf{V}' = 0.\mathbf{V} = 0,$$

ce qui montre bien que le vecteur **N** doit être perpendiculaire au plan P. Inversement, si cette condition est remplie, **N**.**V**′ est nul, donc au vecteur **N** correspond le vecteur zéro.

On montrerait de même que si une transformation est rectiligne, elle admet une infinité de directions principales coplanaires et normales à la droite de dégénérescence.

87. Équation en s. — Soit alors $q(\mathbf{V})$ une forme quadratique non dégénérée. Ses directions principales sont les mêmes que celles de

$$q(\mathbf{V}) - s\mathrm{Q}(\mathbf{V}).$$

Or, il y a certaines valeurs de s pour lesquelles cette dernière forme conduit à une transformation autométrique dégénérée. Pour les trouver, annulons le discriminant de cette forme : c'est un déterminant du troisième ordre, dont les éléments sont des fonctions du premier degré de s; nous obtiendrons une équation du troisième degré.

Formons cette équation en nous conformant aux notations du n° 82. La forme $q_s(\mathbf{V})$ s'écrira

$$q(\mathbf{V}) - s\mathrm{Q}(\mathbf{V}) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\alpha_1 yz + 2\beta_1 zx + 2\gamma_1 xy - s(x^2 + y^2 + z^2).$$

Nous avons à écrire que son discriminant est nul. Nous obtenons ainsi l'équation

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \alpha - s & \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \beta - s & \alpha_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \gamma - s \end{vmatrix} = 0. \tag{73}$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que $\Delta(s)$ est un invariant métrique, pour toute valeur de s; ses coefficients sont donc des invariants. Le terme constant est le discriminant Δ de $q(\mathbf{V})$. Les coefficients de s et de s^2 fournissent deux autres invariants :

$$\beta\gamma - \alpha_1^2 + \gamma\alpha - \beta_1^2 + \alpha\beta - \gamma_1^2 \qquad \text{et} \qquad \alpha + \beta + \gamma.$$

88. Discussion de l'équation en s. — Les méthodes que l'on propose en général, pour l'étude de l'équation en s, font appel à des considérations qui n'ont pas le caractère intrinsèque requis pour trouver place dans notre exposé.

Soit **V** un vecteur, appelons **V**′ son transformé par la transformation linéaire qui dérive de $q(\mathbf{V})$. Considérons tous les vecteurs **V** qui satisfont à la relation

$$\mathbf{V}^2 = 1, \tag{74}$$

c'est-à-dire qui ont pour longueur l'unité. En liant ces vecteurs à un point fixe, l'extrémité en décrira une sphère. Le produit scalaire

$$q(\mathbf{V}) = \mathbf{V}.\mathbf{V}'$$

est alors fonction de la position d'un point sur cette sphère.

Supposons que pour l'un des vecteurs $\mathbf{V}_0$ qui satisfont à la relation (74) la quantité $q(\mathbf{V})$ présente un maximum absolu (1). Exprimons $q(\mathbf{V})$ en utilisant un système orthogonal et normal, constitué par le vecteur $\mathbf{V}_0$ [qui a bien pour longueur l'unité, d'après (74)], et deux autres vecteurs $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$. Nous pourrons écrire

$$\mathbf{V} = x_0\mathbf{V}_0 + x_1\mathbf{V}_1 + x_2\mathbf{V}_2,$$

et

$$q(\mathbf{V}) = A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + 2B_0x_1x_2 + 2B_1x_2x_0 + 2B_2x_1x_0.$$

Il faut exprimer que, si l'on astreint x_0, x_1, x_2 à la condition (74), c'est-à-dire à la condition

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

la fonction $q(\mathbf{V})$ est maximum pour le système de valeurs

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = x_2 = 0.$$

Or, pour ce système de valeurs, elle se réduit à A_0. A cause de l'homogénéité, cette condition est équivalente à la suivante : que la forme

$$A_0(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) - A_0x_0^2 - A_1x_1^2 - A_2x_2^2 - 2B_0x_1x_2 - 2B_1x_2x_0 - 2B_2x_0x_1$$

soit positive, quelles que soient les valeurs x_0, x_1, x_2. Or, dans cette expression, les termes en x_0^2 disparaissent. L'expression se réduit donc au premier degré en x_0, au plus. Pour que tout changement de signe soit impossible, il faut qu'elle soit indépendante de x_0, c'est-à-dire que l'on ait

$$B_1 = B_2 = 0.$$

Dans ces conditions, l'expression de $q(\mathbf{V})$ devra se réduire à

$$\mathbf{V}.\mathbf{V}' = A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + 2B_0x_1x_2.$$

Les formules de transformation seront, pour les vecteurs fondamentaux $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0' &= A_0\mathbf{V}_0, \\ \mathbf{V}_1' &= A_1\mathbf{V}_1 + B_0\mathbf{V}_2, \\ \mathbf{V}_2' &= B_0\mathbf{V}_1 + A_2\mathbf{V}_2; \end{aligned}$$

la première nous montre que la direction du vecteur $\mathbf{V}_0$, qui fournit le maximum du produit $\mathbf{V}.\mathbf{V}'$, est, par cela même, une direction principale, correspondant à la racine $s = A_0$ de (73).

89. Cela posé, considérons la forme $q(\mathbf{V})$. Deux hypothèses sont possibles. Sur la sphère $\mathbf{V}^2 = 1$, ou bien $q(\mathbf{V})$ est constant et alors la forme $q(\mathbf{V})$ est proportionnelle à la forme fondamentale, toute direction est principale, et $\Delta(s)$, rapport de deux volumes correspondants, est de la forme $(\rho - s)^3$. Ou bien $q(\mathbf{V})$ n'est pas constant, et atteint à coup sûr, sur la sphère $\mathbf{V}^2 = 1$, son maximum, soit pour un vecteur $\mathbf{V}$ unique, soit pour certains vecteurs $\mathbf{V}$ dont l'ensemble reste à étudier.

(1) Au sens strict ou au sens large.

Plaçons-nous dans ce cas. D'après le raisonnement précédent, l'existence d'un vecteur $\mathbf{V}_0$, qui sur la sphère $\mathbf{V}^2 = 1$ rend $q(\mathbf{V})$ maximum (au sens strict ou au sens large) nous assure la connaissance d'une direction principale Δ. A cette direction principale correspond une racine de l'équation en s, qui n'est autre que le coefficient de proportionnalité relatif à cette direction.

Les autres directions principales douées de coefficients de proportionnalité différents sont orthogonales à Δ : s'il s'en trouve de même coefficient de proportionnalité que Δ, elles sont (d'après l'hypothèse $\frac{q(\mathbf{V})}{Q(\mathbf{V})}$ non constant) dans un plan passant par Δ, et orthogonal à une autre direction principale ayant son coefficient propre et distinct de celui de Δ.

Nous pouvons en tirer la conclusion suivante :

Le maximum absolu, strict ou large, de $\mathbf{V}.\mathbf{V}'$ nous fournit une direction principale Δ. A tout vecteur $\mathbf{V}$, orthogonal à Δ, correspond un vecteur $\mathbf{V}'$ orthogonal à Δ. Considérons les vecteurs $\mathbf{V}$, soumis à cette condition d'orthogonalité. Leur ensemble constitue une multiplicité linéaire, qui est ici d'ordre deux (et en général d'ordre inférieur d'une unité au nombre des dimensions de l'espace) contenant les autres directions principales. Le degré du problème est ainsi abaissé d'une unité, et on appliquera la même méthode de proche en proche.

Il en résulte que *l'équation en s a toutes ses racines réelles*. La méthode précédente conduit à une séparation théorique des racines (qui se généralise d'ailleurs au cas d'un espace à un nombre quelconque de dimensions). La première racine est fournie par le maximum du produit scalaire $\mathbf{V}.\mathbf{V}'$, pour l'ensemble des vecteurs $\mathbf{V}$, de toutes directions, qui satisfont à la condition $\mathbf{V}^2 = 1$. Que ce maximum ait lieu au sens strict ou au sens large, soit Δ une direction propre à le réaliser : on cherchera les directions principales de la transformation dans l'ensemble des vecteurs $\mathbf{V}$ orthogonaux à Δ. Imposons à ces vecteurs la condition $\mathbf{V}^2 = 1$, et cherchons, dans ce nouveau domaine, le maximum de $\mathbf{V}.\mathbf{V}'$. Nous obtiendrons une nouvelle racine de l'équation en s inférieure ou égale à la précédente, et ainsi de suite. S'il y a inégalité, la première direction Δ est une direction principale isolée. S'il y a égalité, en appelant Δ' une direction principale fournie par la seconde opération, toute direction du plan Δ, Δ' sera principale, etc. (Ceci montre que, dans le cas général, une racine d'ordre de multiplicité p engendrera une infinité de directions principales appartenant à une même multiplicité linéaire d'ordre p). Dans l'espace à trois dimensions, les seules circonstances possibles sont les suivantes :

1° L'équation en s a trois racines distinctes : elles sont alors isolées, et parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle;

2° L'équation en s a une racine double et une racine simple. A cette dernière correspond une direction principale isolée Δ. Il y a en outre une infinité d'autres directions principales, appartenant à un plan perpendiculaire à Δ;

3° L'équation en s a une racine triple. Toute direction est principale.

90. Une transformation issue de $q_s(\mathbf{V})$ est dégénérée si s est racine de l'équation (73). Elle sera du type planaire si s est racine simple, et du type rectiligne si s est racine double. En effet, si s est racine simple, il lui correspond une direction

principale isolée : c'est la seule qui soit douée, pour la transformation issue de $q_s(\mathbf{V})$ du coefficient zéro : la transformation est donc planaire et le plan de dégénérescence est orthogonal à la direction précédente. Au contraire, si s est racine double, nous obtenons une infinité de directions principales situées dans un plan P, et douées, pour la transformation issue de $q_s(\mathbf{V})$, du coefficient zéro. La transformation est alors rectiligne et la droite de dégénérescence est normale au plan P.

Si s est racine simple, il lui correspond une direction principale isolée, qui est encore, avec les notations du n° 87, la droite commune aux trois plans

$$\begin{aligned}(\alpha - s)x + \gamma_1 y + \beta_1 z &= 0,\\ \gamma_1 x + (\beta - s)y + \alpha_1 z &= 0,\\ \beta_1 x + \alpha_1 y + (\gamma - s)z &= 0.\end{aligned}$$

Si s est racine double, il lui correspond une infinité de directions principales coplanaires : les trois plans précédents coïncident alors.

D'après cela, une racine simple de (73) annule $\Delta(s)$, mais non ses mineurs; une racine double annule $\Delta(s)$ et ses mineurs à deux rangées. Toutes ces remarques se généralisent aisément au cas de n dimensions.

91. Équations réduites d'une transformation autométrique. — Cherchons ce que deviennent les équations (72), qui définissent une transformation autométrique, lorsque le système fondamental $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ est non seulement orthogonal et normal, mais encore *principal*, c'est-à-dire formé de vecteurs parallèles aux directions principales de la transformation. Nous devrons alors avoir :

$$\begin{array}{llll}1^\circ & y' = z' = 0 \text{ pour } y = z = 0, & \text{d'où} & \beta_1 = \gamma_1 = 0,\\ 2^\circ & z' = x' = 0 \text{ pour } z = x = 0, & \text{d'où} & \gamma_1 = \alpha_1 = 0,\\ 3^\circ & x' = y' = 0 \text{ pour } x = y = 0, & \text{d'où} & \alpha_1 = \beta_1 = 0.\end{array}$$

Dans nos hypothèses, nous aurons donc simplement

$$(73\ bis) \qquad x' = s_1 x, \qquad y' = s_2 y, \qquad z' = s_3 z,$$

en désignant par s_1, s_2, s_3 les racines de l'équation en s; et, en effet, les coefficients de x, y, z dans les seconds membres sont nécessairement, dans les conditions actuelles, les coefficients de proportionnalité propres aux directions principales.

En même temps, la forme $q(\mathbf{V})$ prendra l'expression

$$(74) \qquad q(\mathbf{V}) = s_1 x^2 + s_2 y^2 + s_3 z^2.$$

Comme vérification, le discriminant de $q(\mathbf{V}) - s\,Q(\mathbf{V})$, ou de

$$(s_1 - s)x^2 + (s_2 - s)y^2 + (s_3 - s)z^2$$

est alors

$$(s_1 - s)(s_2 - s)(s_3 - s).$$

Si s_1, s_2, s_3 sont distinctes, les vecteurs libres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont bien déterminés (aux permutations près). Sinon, il se présente une indétermination, telle que nous l'avons déjà signalée.

A chaque vecteur libre **V**, faisons correspondre un point M, de manière qu'après avoir fixé une origine O, on ait

$$\mathbf{OM} = \mathbf{V}.$$

Si l'on impose au vecteur **V** une condition de la forme $q(\mathbf{V}) = \text{const.}$, le point M décrira une surface du second ordre, ayant pour plans de symétrie les faces du trièdre principal lié au point O. Cette remarque montre la relation de l'ordre d'idées que nous venons d'étudier avec la théorie des directions principales et des éléments de symétrie des quadriques. Nous ne développerons pas davantage cette question, qui fait l'objet d'une étude détaillée dans les cours de géométrie analytique

---

IV

La multiplication vectorielle.

92. Définition du produit vectoriel (ou extérieur). — Soient deux vecteurs libres **U** et **V**, dont l'ordre est ainsi spécifié. Nous considérerons leur *produit vectoriel* **G** (appelé encore *produit géométrique*, ou *produit extérieur*), comme défini par la relation

$$\mathbf{G}.\mathbf{W} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) \tag{75}$$

supposée satisfaite identiquement, c'est-à-dire pour un choix quelconque du vecteur **W**. Comme au n° 80, l'unité à laquelle on rapporte le volume (**U**, **V**, **W**) est le volume du cube construit sur les vecteurs d'un système orthogonal et normal.

Les deux membres de (75) sont l'un et l'autre des formes linéaires de **W**. Pour que ces formes soient identiques, il faut et il suffit qu'elles soient égales quand on confond successivement **W** avec chacun des vecteurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ d'un système fondamental déterminé, car dans un tel système, pour le vecteur $x\,\mathcal{A} + y\,\mathcal{B} + z\,\mathcal{C}$, les valeurs de ces formes sont respectivement

$$x\mathbf{G}.\mathcal{A} + y\mathbf{G}.\mathcal{B} + z\mathbf{G}.\mathcal{C},$$

et

$$x(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathcal{A}) + y(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathcal{B}) + z(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathcal{C}).$$

Si **U** et **V** ne sont pas colinéaires, nous pouvons prendre comme système fondamental celui qui comprend **U** et **V** eux-mêmes, et un vecteur quelconque non situé dans le plan de **U** et de **V**. Écrivons que (75) a lieu quand on y fait successivement

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W} = \mathbf{V}.$$

Le second membre s'annule : donc **G** devra être orthogonal à la fois à **U** et **V**. On peut prendre comme troisième vecteur de notre système fondamental le vecteur **G** lui-même, pourvu que la relation obtenue en remplaçant dans (75) le vecteur **W** par **G** fixe la longueur et le sens de G.

Il en est bien ainsi, car l'on obtient

$$(76) \qquad \mathbf{G}^2 = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{G}).$$

Puisque le premier membre est positif, il doit en être de même de (**U**, **V**, **G**). Donc le trièdre dont les directions des arêtes successives sont données par **U**, **V**, **G** doit avoir même orientation que celui qui provient du système fondamental utilisé pour la construction du cube unité.

En outre, (76) exprime que le carré de la longueur de **G** mesure le volume d'un parallélépipède de hauteur égale à la longueur de **G**, et de base égale au parallélogramme construit sur **U** et **V**.

Il est donc démontré qu'il existe un vecteur **G** et un seul, satisfaisant, quel que soit **W**, à la condition (75). Ses caractéristiques sont les suivantes :

1° *Sa direction est perpendiculaire à la fois à* **U** *et* **V** ;

2° *Sa grandeur a même mesure que l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs ;*

3° *Son sens est tel qu'on ait*

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{G}) > 0.$$

Ce raisonnement suppose que **U** et **V** ne soient pas colinéaires. S'ils le devenaient, le second membre de (75) serait nul, quel que soit **W**. Il en serait donc de même du premier membre. Donc **G** serait nul.

Pour désigner le vecteur **G**, nous utiliserons le symbolisme

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}.$$

93. Propriétés de la multiplication vectorielle. — Si l'on échange **U** et **V**, le second membre de (75) change de signe et conserve sa valeur absolue. Donc **G** se change en — **G**. Ainsi donc, la multiplication vectorielle n'est pas commutative et l'on a

$$\mathbf{V} \wedge \mathbf{U} = -\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}.$$

Vis-à-vis de la multiplication par un coefficient scalaire α, voici la manière de se comporter d'un produit vectoriel :

Le produit vectoriel de **U** *et de* α **V**, *et le produit vectoriel de* α **U** *et de* **V** *sont égaux au produit du scalaire* α *par le vecteur* $\mathbf{G} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{V}$.

En effet, nous venons de voir que le produit vectoriel **G** de **U** et **V** est défini sans ambiguïté par l'équation (75). Il suffit alors de remarquer que cette équation reste satisfaite si on y change d'une part **G** en α**G**, et d'autre part, soit **U** en α **U**, soit **V** en α **V**.

A l'aide d'un raisonnement analogue, nous allons maintenant établir le théorème suivant :

Le produit vectoriel est, pour chacun de ses facteurs, distributif par rapport à l'addition géométrique.

Soit à montrer par exemple que l'égalité

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}''$$

entraîne

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}'',$$

en posant

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{V}, \qquad \mathbf{G}' = \mathbf{U}' \wedge \mathbf{V}, \qquad \mathbf{G}'' = \mathbf{U}'' \wedge \mathbf{V}.$$

Quel que soit **W**, nous aurons

$$\mathbf{G}.\mathbf{W} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}),$$
$$\mathbf{G}'.\mathbf{W} = (\mathbf{U}', \mathbf{V}, \mathbf{W}),$$
$$\mathbf{G}''.\mathbf{W} = (\mathbf{U}'', \mathbf{V}, \mathbf{W}).$$

Ajoutons membre à membre les deux dernières égalités. En tenant compte des propriétés du volume, nous obtenons

$$(\mathbf{G}' + \mathbf{G}'').\mathbf{W} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}),$$

d'où

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}''. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

94. Composantes du produit vectoriel. — Nous supposerons essentiellement qu'on adopte un système fondamental **OI**, **OJ**, **OK**, qui soit non seulement orthogonal et normal, mais qui soit doué d'une orientation directe, de manière que le cube construit sur **OI**, **OJ**, **OK** ait pour volume l'unité positive. Nous aurons dans ces conditions

$$(\mathbf{OI}, \mathbf{OJ}, \mathbf{OK}) = (\mathbf{OJ}, \mathbf{OK}, \mathbf{OI}) = (\mathbf{OK}, \mathbf{OI}, \mathbf{OJ}) = +1.$$

L'application immédiate de la règle du n° 92 donnant les caractéristiques d'un produit vectoriel montre alors que l'on a

$$(77) \qquad \begin{cases} \mathbf{OJ} \wedge \mathbf{OK} = \mathbf{OI}, \\ \mathbf{OK} \wedge \mathbf{OI} = \mathbf{OJ}, \\ \mathbf{OI} \wedge \mathbf{OJ} = \mathbf{OK}. \end{cases}$$

Cela posé, soient deux vecteurs libres **U** et **V**, de composantes x, y, z et x', y', z'. Nous aurons

$$\mathbf{U} = x\mathbf{OI} + y\mathbf{OJ} + z\mathbf{OK},$$
$$\mathbf{V} = x'\mathbf{OI} + y'\mathbf{OJ} + z'\mathbf{OK}.$$

Nous pouvons multiplier ces deux égalités membre à membre, suivant les règles ordinaires, mais en ayant soin de réserver dans chaque monôme, la première place aux vecteurs qui proviennent de la première ligne, et la seconde place aux vecteurs qui proviennent de la seconde ligne. En associant des termes de même rang, nous obtiendrons zéro, puisque ces termes sont des vecteurs colinéaires. En associant le *second* erme de la première ligne et le *troisième* terme de la seconde, nous obtiendrons

$$yz'\mathbf{OJ} \wedge \mathbf{OK}.$$

Si nous échangeons, et si nous associons le troisième terme de la première ligne et le second terme de l'autre, nous obtiendrons

$$zy'\mathbf{OK} \wedge \mathbf{OJ}.$$

Il y a intérêt à rapprocher les deux termes précédents, dont l'ensemble équivaut à

$$(yz' - zy')\,\mathbf{OJ} \wedge \mathbf{OK}.$$

Finalement, nous pourrons donc écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} &= (yz' - zy')\,\mathbf{OJ} \wedge \mathbf{OK} + (zx' - xz')\,\mathbf{OK} \wedge \mathbf{OI} + (xy' - yx')\,\mathbf{OI} \wedge \mathbf{OJ} \\ &= (yz' - zy')\,\mathbf{OI} + (zx' - xz')\,\mathbf{OJ} + (xy' - yx')\,\mathbf{OK};\end{aligned}$$

d'où ce théorème :

Soit un système fondamental, orthogonal, normal et direct. Le produit vectoriel de deux vecteurs ayant pour composantes respectives x, y, z et x', y', z' a pour composantes

$$yz' - zy', \qquad zx' - xz', \qquad xy' - yx'.$$

V

Théorie des vecteurs glissants.

95. Position du problème. — Les opérations définies jusqu'à présent portaient seulement sur des scalaires et des vecteurs libres, et conduisaient elles-mêmes à des scalaires ou à des vecteurs libres. Il n'y a aucune difficulté à généraliser et à concevoir un calcul vectoriel plus étendu, dont les éléments primordiaux seraient par exemple des scalaires, des points, des vecteurs libres, des vecteurs glissants, les opérations de ce calcul conduisant elles-mêmes à des scalaires, des points, des vecteurs libres ou des vecteurs glissants. Ce calcul engloberait le calcul plus restreint développé jusqu'à présent, et dont le calcul algébrique n'est lui-même qu'une partie, celle qui étudie les lois de composition des scalaires entre eux. Il comprendrait aussi la théorie des barycentres, développée au n° 53, et qui constitue un mode de composition entre points, dont le résultat final est un point. Dans cette section, nous nous proposons d'étudier les opérations les plus simples sur les vecteurs glissants et sur les systèmes de vecteurs glissants.

Nous représenterons un vecteur glissant en écrivant entre parenthèses un vecteur lié susceptible de représenter ce vecteur glissant, c'est-à-dire obtenu en fixant son origine sur son support.

Soit le vecteur glissant (OA). Par définition, son produit par un scalaire x est un nouveau vecteur glissant de même support, et dont la grandeur vectorielle est le produit par x de celle du vecteur initial. On pourra en particulier définir deux vecteurs glissants opposés ($x = -1$).

Cette définition appartient à la géométrie linéaire. En nous plaçant au point de vue de cette dernière, nous définirons le moment scalaire de deux vecteurs glissants, et nous appliquerons cette notion à la théorie de l'équivalence des systèmes de vecteurs glissants.

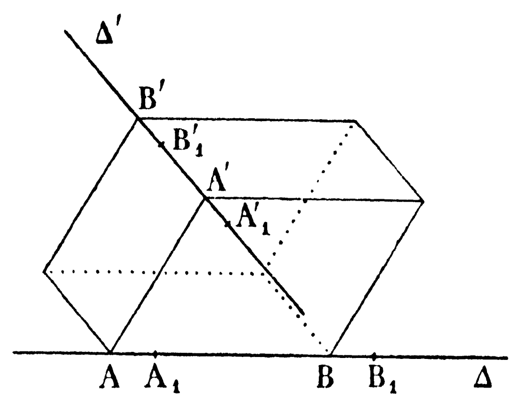
96. Moment scalaire de deux vecteurs glissants. — Soient deux vecteurs glissants (AB) et (A′B′) de supports Δ et Δ'. Considérons le parallélépipède construit sur AB, AA′, A′B′ comme arêtes non parallèles. Son volume algébrique est une fonction des grandeurs vectorielles de ces trois arêtes

$$v = (\mathbf{AB},\ \mathbf{AA'},\ \mathbf{A'B'}). \tag{78}$$

Je dis qu'il est indépendant de la position de A sur Δ et de A′ sur Δ' : ce point établi, il sera légitime de regarder v comme une fonction de nos deux vecteurs glissants. Effectivement, substituons à A un autre point A_1 de Δ, à A′ un autre point A'_1 de Δ'. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{AA'} &= \mathbf{AA_1} + \mathbf{A_1A'_1} + \mathbf{A'_1A'}\\ &= \lambda\,\mathbf{AB} + \mathbf{A_1A'_1} + \lambda'\mathbf{A'B'};\end{aligned}$$

en portant cette valeur de $\mathbf{AA'}$ dans l'expression de v, nous pouvons décomposer cette dernière en une somme de trois termes : le premier et le dernier sont nuls et il reste



$$v = (\mathbf{A_1B_1},\ \mathbf{A_1A'_1},\ \mathbf{A'_1B'_1}),$$

ce qui établit le résultat annoncé.

Remarquons que le nombre v, défini par (78), est une fonction symétrique de nos deux vecteurs glissants, car, en les échangeant, on intervertit les deux termes extrêmes dans la parenthèse, en même temps qu'on substitue au terme moyen son opposé.

Pratiquement, il est indiqué de substituer au parallélépipède précédent le tétraèdre ABA′B′ construit sur les deux vecteurs : on sait, par le calcul intégral, que son volume est le sixième, en valeur absolue, de celui du parallélépipède. Posons donc

$$v = 6[(\mathrm{AB}),\ (\mathrm{A'B'})]. \tag{79}$$

La fonction symétrique $\frac{v}{6}$ s'appelle le MOMENT SCALAIRE des deux vecteurs. Elle change de signe quand on substitue, à l'un de ces vecteurs, son opposé. C'est donc la *disposition relative* des deux vecteurs qui réglemente le signe de leur moment scalaire. Le moment est opportun pour préciser cette notion. Remarquons à cet effet qu'il y a communauté de sens entre les deux trièdres ainsi constitués :

1[re] arête : l'un des vecteurs, auquel on assigne, sur son support, une origine arbitraire;

2[e] arête : droite joignant cette origine à celle de l'autre vecteur;

3[e] arête : droite joignant cette origine à l'extrémité de l'autre vecteur.

Cette communauté de sens résulte clairement des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB},\ \mathbf{AA'},\ \mathbf{AB'}) &= (\mathbf{AB},\ \mathbf{AA'},\ \mathbf{AA'} + \mathbf{A'B'}) = (\mathbf{AB},\ \mathbf{AA'},\ \mathbf{A'B'}) = (\mathbf{A'B'},\ \mathbf{A'A},\ \mathbf{AB})\\ &= (\mathbf{A'B'},\ \mathbf{A'A},\ \mathbf{A'A} + \mathbf{AB}) = (\mathbf{A'B'},\ \mathbf{A'A},\ \mathbf{A'B}).\end{aligned}$$

Dès lors, si ces deux trièdres sont directs, il est naturel de dire que l'orientation relative de nos deux vecteurs est elle-même directe. Le second membre de (79) aura alors le signe +, etc.

En résumé, le moment scalaire a pour valeur absolue le volume du tétraèdre construit sur les deux vecteurs glissants. Son signe est donné par l'orientation relative de ces vecteurs.

Pour que le moment scalaire de deux vecteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un de ces vecteurs soit nul, ou que ces vecteurs soient situés dans un même plan.

97. Systèmes équivalents. — Soit un système de n vecteurs glissants

$$(A_1B_1),\ (A_2B_2),\ \ldots,\ (A_nB_n).$$

Soit (PQ) un vecteur glissant quelconque. Faisons la somme des moments scalaires de (PQ) et de l'un quelconque des vecteurs précédents, soit

$$\Phi_{(PQ)} = [(A_1B_1),\ (PQ)] + [(A_2B_2),\ (PQ)] + \ldots + [(A_nB_n),\ (PQ)];$$

nous obtenons ainsi une fonction scalaire de (PQ), appelée *fonction caractéristique* du système (S) considéré.

Nous dirons que deux systèmes (S) et (S′) sont *équivalents* s'ils donnent naissance à la même fonction caractéristique.

Lorsque (S) *et* (S′) *comprennent chacun un seul vecteur, la notion d'équivalence se réduit à l'identité pure et simple.*

En effet, supposons que (S) se réduise à un seul vecteur (AB) et (S′) à un seul vecteur (A′B′). L'équivalence exige que l'on ait

$$[(AB),\ (PQ)] = [(A'B'),\ (PQ)],$$

quel que soit (PQ). Nous supposons d'ailleurs que (AB) et (A′B′) ne sont pas nuls. Les deux membres ne s'annuleront simultanément que si toute droite rencontrant (AB) rencontre aussi (A′B′), c'est-à-dire si les supports de ces vecteurs coïncident. Mais alors la condition précédente n'a lieu en grandeur et en signe que si A′B′ se déduit de AB par un glissement le long de ce support commun. (C. Q. F. D.)

Notons encore un cas remarquable d'équivalence :

Tout système de vecteurs glissants, dont les supports concourent en un point O, *équivaut à un vecteur glissant unique, dont le support passe par* O *et dont la grandeur vectorielle est la somme géométrique des vecteurs du premier système.*

En effet, soient par exemple les trois vecteurs (OA), (OB), (OC). Quel que soit PQ, nous avons

$$[(OA),\ (PQ)] + [(OB),\ (PQ)] + [(OC),\ (PQ)]$$
$$= \frac{1}{6}\left\{ (\mathbf{OA},\ \mathbf{OP},\ \mathbf{PQ}) + (\mathbf{OB},\ \mathbf{OP},\ \mathbf{PQ}) + (\mathbf{OC},\ \mathbf{OP},\ \mathbf{PQ}) \right\}.$$

Soit OR un vecteur tel que

$$\mathbf{OR} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC}.$$

Nous pourrons écrire, quel que soit (PQ),

$$[(OA), (PQ)] + [(OB), (PQ)] + [(OC), (PQ)] = \frac{1}{6}(\mathbf{OR}, \mathbf{OP}, \mathbf{PQ}) = [(OR), (PQ)],$$

égalité d'où résulte bien l'équivalence annoncée.

Nous allons nous proposer maintenant de traduire, à l'aide d'un minimum de conditions exprimées par des égalités scalaires, l'équivalence de deux systèmes quelconques. Étant donnés deux systèmes (S) et (Σ), nous appellerons pour abréger $(S + \Sigma)$ celui qui contient à la fois les vecteurs de (S) et ceux de (Σ). Nous appellerons système $(-\Sigma')$ celui qui comprend tous les vecteurs respectivement opposés à ceux du système (Σ') (1).

Pour que les systèmes (S) et (S′) soient équivalents, il faut et il suffit que le système (S — S′) soit équivalent à zéro. Il nous suffira donc de résoudre ce problème : condition pour qu'un système soit équivalent à zéro.

98. Condition pour qu'un système soit équivalent à zéro. — Il s'agit d'exprimer que l'on a

$$\Phi_{(PQ)} = 0$$

quel que soit (PQ). Prenons un point O quelconque, et un plan Π également quelconque, mais ne contenant pas le point O.

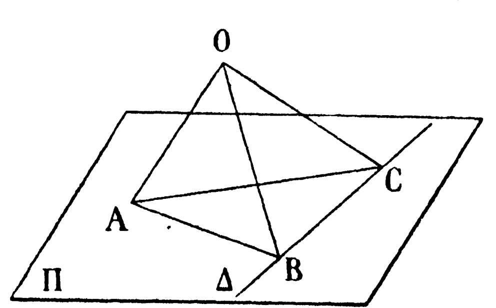
Tout vecteur (PQ) est *équivalent* à l'ensemble de deux autres vecteurs, l'un passant par le point O, l'autre situé dans le plan Π. L'expression $\Phi_{(PQ)}$ est la somme des deux expressions analogues relatives à ces deux vecteurs partiels.

Donc il suffit d'exprimer que Φ est nul :

1° pour tout vecteur passant par O, et même, plus simplement, pour trois vecteurs non coplanaires passant par O ;

2° pour tout vecteur situé dans le plan Π.

Considérons, dans le plan Π, un point quelconque O_1 et une droite Δ, également quelconque, mais ne contenant pas le point O_1. Tout vecteur du plan Π est *équivalent* à l'ensemble de deux autres vecteurs de ce plan, l'un passant par O_1, l'autre porté par Δ. Donc il suffit d'exprimer maintenant que Φ est nul :



1° pour tout vecteur du plan Π passant par O_1, et même, simplement, pour deux vecteurs non colinéaires de cette famille ;

2° pour tout vecteur porté par la droite Δ.

Rassemblons toutes les conditions que nous venons d'obtenir, et pour leur donner une forme plus frappante, appelons (OA), (OB), (OC) trois vecteurs non coplanaires issus de O. Nous supposerons que A, B, C sont précisément des points du plan Π, que O_1 est confondu avec le point A, et la droite BC avec Δ.

(1) Il convient de remarquer que si les fonctions caractéristiques de l'équivalence sont précisément $\Phi_{(PQ)}$ et $\Psi_{(PQ)}$ pour les systèmes (S) et (Σ), la fonction caractéristique sera $\Phi_{(PQ)} + \Psi_{(PQ)}$ pour le système $(S) + (\Sigma)$, etc.

Nous serons amenés finalement à exprimer que Φ s'annule pour les six arêtes d'un tétraèdre quelconque OABC.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Pour qu'un système de vecteurs glissants soit équivalent à zéro, il faut et il suffit qu'en appelant OABC *un tétraèdre quelconque, les vecteurs de ce système satisfassent aux six conditions*

$$\Phi_{(OA)} = \Phi_{(OB)} = \Phi_{(OC)} = \Phi_{(BC)} = \Phi_{(CA)} = \Phi_{(AB)} = 0.$$

On en déduit les conditions d'équivalence de deux systèmes (S) et (S′). En appelant Φ et Φ' les deux sommes de moments scalaires obtenues en associant à tout vecteur de (S) ou de (S′) un vecteur arbitraire, ces conditions sont les suivantes :

$$\Phi_{(OA)} = \Phi_{(OA)}, \qquad \Phi_{(OB)} = \Phi'_{(OB)}, \qquad \Phi_{(OC)} = \Phi'_{(OC)},$$
$$\Phi_{(BC)} = \Phi'_{(BC)}, \qquad \Phi_{(CA)} = \Phi'_{(CA)}, \qquad \Phi_{(AB)} = \Phi'_{(AB)}.$$

Les six quantités $\Phi_{(OA)}$, $\Phi_{(OB)}$, $\Phi_{(OC)}$, $\Phi_{(BC)}$, $\Phi_{(CA)}$, $\Phi_{(AB)}$ sont donc caractéristiques d'un système de vecteurs (au point de vue de la théorie de l'équivalence).

Considérons en particulier un système pour lequel toutes ces quantités seraient nulles, à l'exception de l'une d'entre elles. Par exemple, supposons que seul $\Phi_{(BC)}$ ne soit pas nul. Un vecteur porté par OA satisfait justement à cette condition. Donc, un système possédant cette propriété particulière est équivalent à un vecteur porté par OA.

Il en résulte bien aisément qu'étant donné un système (S) quelconque, on peut trouver un système équivalent et un seul de vecteurs portés respectivement par les six arêtes d'un tétraèdre. Ceci s'applique en particulier à la décomposition d'un vecteur quelconque.

La décomposition tétraédrique appelle les remarques suivantes. Soit v le volume du tétraèdre OABC, ou avec plus de précision

$$v = [(OA), (BC)] = [(OB), (CA)] = [(OC), (AB)].$$

Considérons un système caractérisé par les six nombres

$$\Phi_{(BA)}, \Phi_{(OB)}, \Phi_{(OC)}, \Phi_{(BC)}, \Phi_{(CA)}, \Phi_{(AB)}.$$

D'après ce qui précède, nous pouvons l'envisager comme la somme de six autres systèmes, dont l'un

$$\Phi_{(OA)}, 0, 0, 0, 0, 0$$

est équivalent à un vecteur porté par BC, vecteur que nous pouvons représenter par λ(BC), en appelant λ un coefficient positif ou négatif. Pour déterminer λ, remarquons que le système auxiliaire constitué par le vecteur unique (BC) est caractérisé par les six nombres

$$v, 0, 0, 0, 0, 0,$$

donc le système constitué par le vecteur unique λ (BC) sera caractérisé par

$$\lambda v, 0, 0, 0, 0, 0.$$

Nous en déduisons

$$\lambda v = \Phi_{(OA)}$$

et nous en concluons finalement à la possibilité d'écrire le système caractérisé par les six nombres

$$\Phi_{(OA)},\ \Phi_{(OB)},\ \Phi_{(OC)},\ \Phi_{(BC)},\ \Phi_{(CA)},\ \Phi_{(AB)}$$

sous la forme symbolique

$$(S) = \frac{(OA)\Phi_{(BC)} + (OB)\Phi_{(CA)} + (OC)\Phi_{(AB)} + (BC)\Phi_{(OA)} + (CA)\Phi_{(OB)} + (AB)\Phi_{(OC)}}{[(OA),\ (BC)]},$$

qui fait appel à la définition du système $(S + \Sigma)$, somme de deux autres, et où le signe $(=)$ signifie l'équivalence des deux systèmes écrits dans les deux membres. Quel que soit le vecteur (PQ), nous aurons, d'après nos définitions, l'égalité ordinaire

$$\Phi_{(PQ)} = \frac{[(OA),(PQ)]\Phi_{(BC)}+[(OB),(PQ)]\Phi_{(CA)}+[(OC),(PQ)]\Phi_{(AB)}+[(BC),(PQ)]\Phi_{(OA)}+[(CA),(PQ)]\Phi_{(OB)}+[(AB),(PQ)]\Phi_{(OC)}}{[(OA),\ (BC)]}.$$

99. Moment scalaire de deux systèmes. — Soient les deux systèmes (S) et (Σ), auxquels correspondent respectivement les deux fonctions caractéristiques $\Phi_{(PQ)}$ et $\Psi_{(PQ)}$. Appelons par exemple

$$(A_1B_1),\ (A_2B_2),\ \ldots,\ (A_iB_i)$$

les vecteurs du système (S) et

$$(C_1D_1),\ (C_2D_2),\ \ldots,\ (C_kD_k)$$

ceux du système (Σ). D'après la définition des fonctions Φ et Ψ, il est évident *a priori* que les deux sommes

$$\Psi_{(A_1B_1)} + \Psi_{(A_2B_2)} + \ldots + \Psi_{(A_iB_i)}$$

et

$$\Phi_{(C_1D_1)} + \Phi_{(C_2D_2)} + \ldots + \Phi_{(C_kD_k)}$$

sont égales, car elles représentent la somme des volumes algébriques des tétraèdres obtenus en associant un vecteur quelconque du premier système et un vecteur quelconque du second. On déduit des résultats obtenus au numéro précédent la possibilité d'écrire la valeur commune de ces sommes sous la forme

$$\frac{\Psi_{(OA)}\Phi_{(BC)} + \Psi_{(OB)}\Phi_{(CA)} + \Psi_{(OC)}\Phi_{(AB)} + \Psi_{(BC)}\Phi_{(OA)} + \Psi_{(CA)}\Phi_{(OB)} + \Psi_{(AB)}\Phi_{(OC)}}{[(OA,\ (BC)]}.$$

Cette valeur est appelée le moment scalaire des deux systèmes.

Supposons, en particulier, que le système Σ soit équivalent au système (S). L'expression précédente se réduit au double de la quantité

$$\frac{\Phi_{(OA)}\Phi_{(BC)} + \Phi_{(OB)}\Phi_{(CA)} + \Phi_{(OC)}\Phi_{(AB)}}{[(OA),\ (BC)]},$$

qui est la somme des moments scalaires des vecteurs du système (S) pris deux à deux. On l'appelle aussi l'*automoment* de (S) [1]. Si un système est équivalent à un vecteur unique, son automoment est nul.

100. Étude de la fonction $\Phi_{(PQ)}$. — Désignons par (PQ) et (P'Q') deux vecteurs glissants équipollents. La fonction $\Phi_{(PQ)}$ est une somme de termes tels que

$$[(AB),\ (PQ)]$$

étendue à tous les vecteurs (AB) du système (S). Nous avons

$$[(AB),\ (PQ)] = \frac{1}{6}(\mathbf{AB},\ \mathbf{AP},\ \mathbf{PQ}),$$

et de même

$$[(AB),\ (P'Q')] = \frac{1}{6}(\mathbf{AB},\ \mathbf{AP'},\ \mathbf{P'Q'}).$$

Puisque, par hypothèse, $\mathbf{P'Q'} = \mathbf{PQ}$, nous pouvons encore écrire

$$[(AB),\ (P'Q')] = \frac{1}{6}(\mathbf{AB},\ \mathbf{AP} + \mathbf{PP'},\ \mathbf{PQ}) = [(AB),\ (PQ)] + [(PM),\ (P'Q')],$$

le point M étant déterminé de manière que l'on ait

$$\mathbf{PM} = \mathbf{AB}.$$

En ajoutant membre à membre toutes les égalités analogues à la précédente, et en remarquant qu'à l'ensemble des termes

$$[(PM_1),\ (P'Q')] + [(PM_2),\ (P'Q')] + \dots$$

on peut substituer

$$[(PR),\ (P'Q')],$$

(PR) étant un vecteur glissant dont le support contient le point P, et dont la grandeur vectorielle est la somme géométrique de celles des vecteurs du système, on obtient finalement

$$\Phi_{(P'Q')} = \Phi_{(PQ)} + [(PR),\ (P'Q')]. \tag{82}$$

L'équation (82) a une conséquence importante :

Deux systèmes de vecteurs glissants ne peuvent être équivalents que s'ils admettent la même somme géométrique.

D'ailleurs, elle ramène le calcul de Φ, pour un vecteur quelconque (P'Q'), à celui de Φ pour un vecteur équipollent (PQ) mené par un point fixe O. On peut donc formuler ainsi les conditions d'équivalence :

Pour que deux systèmes soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même somme géométrique et même fonction caractéristique dans l'ensemble des vecteurs (PQ) *passant par* O.

La communauté de somme géométrique implique trois conditions scalaires, et

(1) Voir la *Cinématique théorique* de G. Kœnigs, chap. I, page 25.

pareillement, la communauté d'expression $\Phi_{(PQ)}$ dans l'ensemble des vecteurs passant par O : il suffit d'écrire, nous l'avons dit, que cette dernière a lieu pour trois vecteurs (OA), (OB), (OC) non coplanaires. Nous retrouvons bien, sous cette nouvelle forme, six conditions d'équivalence.

La relation (82) montre en outre que si (PR) et (P′Q′) sont dans un même plan, on a

$$\Phi_{(PQ)} = \Phi_{(P'Q')}. \tag{83}$$

En particulier, la relation (83) est satisfaite lorsque (P′Q′) se déduit de (PQ) par une translation parallèle à la somme géométrique.

Pour que la relation (83) ait lieu pour tous les vecteurs (PQ) et (P′Q′) équipollents, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathbf{PR} = 0,$$

c'est-à-dire que le système (S) ait une somme géométrique nulle.

Pour achever l'étude de la fonction $\Phi_{(PQ)}$, il resterait à étudier l'équation

$$\Phi_{(PQ)} = 0. \tag{84}$$

Cette équation exprime une propriété de la droite qui est le support du vecteur (PQ). Les droites de l'espace forment une famille à quatre paramètres. Celles qui satisfont à la condition scalaire (84) ne dépendent plus que de trois paramètres : on dit qu'elles forment un *complexe*. La condition (84) exprime que la somme des moments scalaires d'un vecteur pris sur une de ces droites avec chacun des vecteurs du système (S) est nulle. Pour cette raison, on les appelle *droites de moment nul.*

Si l'on connaît deux droites de moment nul qui concourent en un point, on en connaît une infinité d'autres : toutes celles qui passent par ce point dans le plan des deux premières.

101. Couples. — L'étude de la fonction $\Phi_{(PQ)}$ nous a conduit à mettre à part les systèmes (S) dont la somme géométrique est nulle. Pour ces systèmes, l'égalité géométrique

$$\mathbf{P'Q'} = \mathbf{PQ}$$

entraîne

$$\Phi_{(P'Q')} = \Phi_{(PQ)}.$$

Par suite, si une droite est de moment nul, il en est de même de toutes les droites parallèles. Soient Δ et Δ' deux droites de moment nul non parallèles. On épuisera la totalité des droites de moment nul par l'ensemble des droites dont la direction est parallèle à un plan contenant celles de Δ et de Δ'. Il intervient donc ici une direction de plans à laquelle toute droite de moment nul est parallèle. (Pour qu'il y eût des droites de moment nul non parallèles à ce plan, il faudrait que toute droite de l'espace fût de moment nul, c'est-à-dire que le système (S) fût équivalent à zéro.)

Deux systèmes (S) et (S′), de somme géométrique nulle, ne peuvent s'équivaloir que si cette direction remarquable de plans leur est commune. S'il en est bien ainsi, cinq des conditions de l'équivalence sont déjà traduites, il n'en reste qu'une sixième à exprimer.

Effectivement, soit Π un plan tel que toute droite de ce plan soit de moment nul pour (S) comme pour (S′). Soit OA un vecteur, issu d'un point O du plan Π et non situé dans ce plan. Puisque la somme géométrique de (S) et de (S′) est nulle, Φ se réduit, pour chacun de ces systèmes, à une fonction linéaire d'un vecteur libre, nulle pour les vecteurs parallèles au plan Π. Il suffit donc d'écrire que l'on a

$$\Phi'_{(OA)} = \Phi_{(OA)}.$$

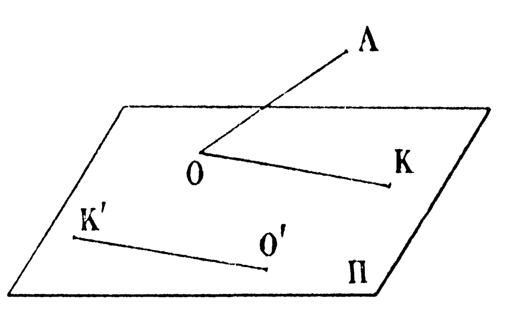
Traçons dans le plan Π un vecteur (O′K′) tel que l'on ait

$$[(OA), (O'K')] = \Phi_{(OA)}, \tag{85}$$

et déterminons le point K par la condition

$$OK = -O'K'.$$

D'après ce qui précède, le système des deux vecteurs (OK), (O′K′) est équivalent au système (S). Un tel système s'appelle un COUPLE. Pour que deux couples soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils soient situés dans un même plan, ou dans des plans parallèles, et qu'en outre il y ait égalité entre leurs aires algébriques : on peut remarquer que la relation (85) détermine en effet l'aire algébrique du couple.



En résumé, *tout système de somme géométrique nulle est équivalent à un couple.*

102. Réduction d'un système quelconque à un vecteur et à un couple. — Considérons un système (S) absolument quelconque. A chaque point O, lions un vecteur OR de grandeur vectorielle égale à la somme géométrique du système (S). Le système (S) équivaut à l'ensemble du vecteur (OR) et d'un système de somme géométrique nulle, c'est-à-dire d'un couple. On peut donc, et d'une infinité de manières, réduire le système (S) au vecteur (OR) et à un couple. Le plan de ce couple n'est déterminé qu'en direction. Si nous lui imposons de contenir le point O, toutes les droites de ce plan qui sont de moment nul [vis-à-vis de (S)] passent par le point O.

Cherchons en particulier *la condition pour qu'un système* (S) *soit réductible à un vecteur unique* (AB). Menons en O le vecteur (OR) équipollent à la somme géométrique du système. Le système doit être équivalent au vecteur (OR) et à un couple [(— OR), (AB)]. Il faut pour cela que *le plan du couple contienne* (OR). Inversement, si cette condition est remplie et si (OR) n'est pas nul, le système est équivalent à un ensemble qui comprend (OR) et un couple dont l'un des vecteurs peut être confondu avec (— OR). D'où ce théorème :

Pour qu'un système* (S), *de somme géométrique non nulle, soit équivalent à un vecteur unique, il faut et il suffit qu'en réduisant ce système à un vecteur

(OR) *et à un couple, on obtienne un vecteur* (OR) *situé dans le plan du couple* [1].

Il résulte immédiatement de ce théorème que tout système de vecteurs situé dans un plan équivaut soit à un couple soit à un vecteur unique.

103. Expression analytique de la condition d'équivalence à un vecteur unique. — Reprenons le point de vue développé au n° 98 et supposons qu'on ait décomposé un système (S) suivant les six arêtes d'un tétraèdre OABC. Écrivons symboliquement

$$(S) = \frac{(OA)\Phi_{(BC)} + (OB)\Phi_{(CA)} + (OC)\Phi_{(AB)} + (BC)\Phi_{(OA)} + (CA)\Phi_{(OB)} + (AB)\Phi_{(OC)}}{[(OA), (BC)]}.$$

La grandeur vectorielle de la somme géométrique de (S) est

$$\frac{\mathbf{OA}\,\Phi_{(BC)} + \mathbf{OB}\,\Phi_{(CA)} + \mathbf{OC}\,\Phi_{(AB)} + \mathbf{BC}\,\Phi_{(OA)} + \mathbf{CA}\,\Phi_{(OB)} + \mathbf{AB}\,\Phi_{(OC)}}{[(OA), (BC)]}.$$

Supposons que cette somme géométrique ne soit pas nulle, et que *l'automoment* de (S) *soit nul*, c'est-à-dire que l'on ait

$$(86) \qquad \Phi_{(OA)}\Phi_{(BC)} + \Phi_{(OB)}\Phi_{(CA)} + \Phi_{(OC)}\Phi_{(AB)} = 0.$$

Je dis que (S) *équivaudra à un vecteur unique.* En effet, puisque la somme géométrique n'est pas nulle, il y a au moins dans le tétraèdre une face, par exemple ABC, dont les côtés portent trois vecteurs de décomposition dont la somme géométrique n'est pas nulle. Ces vecteurs sont dans un même plan : leur ensemble équivaut donc à un vecteur unique (GH). Les trois autres arêtes du tétraèdre aboutissent au sommet O, opposé de la face précédente : les vecteurs qu'elles portent équivalent aussi, dans leur ensemble, à un vecteur unique (OK). Nous pouvons donc écrire symboliquement

$$(GH) = \frac{(BC)\Phi_{(OA)} + (CA)\Phi_{(OB)} + (AB)\Phi_{(OC)}}{[(OA), (BC)]},$$

$$(OK) = \frac{(OA)\Phi_{(BC)} + (OB)\Phi_{(CA)} + (OC)\Phi_{(AB)}}{[(OA), (BC)]},$$

et la relation (86) est équivalente à

$$[(GH), (OK)] = 0.$$

Donc elle exprime que (GH) et (OK) sont dans un même plan. Puisque la somme géométrique n'est pas nulle, le système est donc réductible à un vecteur unique.

En résumé, la relation (86) est la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit équivalent ou bien à un vecteur unique, ou bien à un couple. On élimine toute ambiguïté en se reportant à l'expression de la somme géométrique.

(1) A vrai dire, cette condition n'est imposée qu'en direction. — On peut remarquer aussi que la condition d'équivalence à un vecteur unique est satisfaite s'il existe un point tel que la fonction caractéristique s'annule pour tout vecteur passant par ce point.

Remarque. — Au n° 100 nous avons envisagé un point de vue un peu différent : il nous amenait à prendre trois vecteurs fondamentaux OA, OB, OC liés au point O, et à mettre en évidence, dans l'expression symbolique de O, un vecteur (OR) tel que **OR** ait pour grandeur la somme géométrique. En posant

$$(OR) = x(OA) + y(OB) + z(OC),$$

le signe = signifiant toujours une *équivalence*, nous écrivions

$$(S) = (OR) + (S_1),$$

le système (S_1) ayant une somme géométrique nulle, c'est-à-dire étant équivalent à un couple. Or ce cas rentre dans le précédent, si l'on a soin de choisir la direction du plan ABC parallèle au plan du couple. En effet, dans cette hypothèse, récrivons la formule générale

$$(S) = \frac{(OA)\Phi_{(BC)} + (OB)\Phi_{(CA)} + (OC)\Phi_{(AB)} + (BC)\Phi_{(OA)} + (CA)\Phi_{(OB)} + (AB)\Phi_{(OC)}}{[(OA), (BC)]},$$

et cherchons les expressions de (OR) et de S_1. Pour (OR), ses moments scalaires avec (OA), (OB), (OC) sont nuls. Pour S_1, les droites BC, CA, AB sont des droites de moment nul, parce qu'appartenant en direction au plan du couple. Donc nous avons

$$(OR) = \frac{(OA)\Phi_{(BC)} + (OB)\Phi_{(CA)} + (OC)\Phi_{(AB)}}{[(OA), (BC)]} = x(OA) + y(OB) + z(OC),$$

$$(S_1) = \frac{(BC)\Phi_{(OA)} + (CA)\Phi_{(OB)} + (AB)\Phi_{(OC)}}{[(OA), (BC)]}.$$

Donc, l'automoment du système peut encore s'écrire

$$x\Phi_{(OA)} + y\Phi_{(OB)} + z\Phi_{(OC)}.$$

En l'annulant, on obtiendra, si x, y, z ne sont pas tous nuls, la condition pour que le système soit équivalent à un vecteur unique.

104. Centre des vecteurs parallèles. — Soit un système (S), formé de vecteurs glissants parallèles. Si la somme géométrique est nulle, le système équivaut à un couple. Nous écarterons cette hypothèse, et nous supposerons que le système admet une somme géométrique non nulle. On peut alors montrer qu'il équivaut à un vecteur unique.

En effet, soient (A_1B_1), (A_2B_2), ..., (A_nB_n) les vecteurs parallèles dont se compose le système (S). Prenons un point O quelconque. Tout vecteur (A_iB_i) de S équivaut à l'ensemble du vecteur équipollent (OV_i) mené par O, et du couple $(-OV_i)$, (A_iB_i). L'ensemble des vecteurs (OV_i) équivaut à un vecteur unique (OR) dont la grandeur vectorielle est la somme géométrique. Tous les couples $(-OV_i)$, (A_iB_i) sont dans des plans passant par (OR). Donc, ils admettent (OR) comme droite de moment nul. Il en est donc de même du couple résultant dont le plan contiendra (OR). En conséquence, puisque la somme géométrique n'est pas nulle, le système (S) se réduit bien à un vecteur unique.

Toujours sous la restriction que la somme géométrique n'est pas nulle, nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on fait varier les vecteurs du système, en conservant leur parallélisme et les rapports algébriques de leurs grandeurs vectorielles, et en imposant au support de chacun de ces vecteurs de passer par un point fixe, le support du vecteur unique équivalent au système passe lui-même par un point fixe. Ce point, appelé* CENTRE DES VECTEURS PARALLÈLES, *n'est autre que le barycentre des points fixes (assignés aux divers vecteurs du système), doués de coefficients respectivement proportionnels aux grandeurs géométriques de ces vecteurs.*

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les n points fixes assignés aux vecteurs $(A_1B_1), (A_2B_2), \ldots, (A_nB_n)$ du système (S). Par hypothèse, nous avons

$$\mathbf{A_1B_1} = \lambda_1 \mathbf{V}, \qquad \mathbf{A_2B_2} = \lambda_2 \mathbf{V}, \; \ldots \qquad \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n = \lambda_n \mathbf{V},$$

V étant un vecteur libre dont la direction est la direction commune de tous les vecteurs de S. D'après les conditions de l'énoncé, les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des quantités constantes, de somme non nulle. Le vecteur **V** peut varier d'une manière quelconque.

Pour établir la proposition, il suffit de montrer que la fonction caractéristique $\Phi_{(PQ)}$ est nulle pour l'ensemble des vecteurs (PQ) qui passent par le barycentre G, défini symboliquement par

$$G = \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n};$$

en effet, soit (GK) un vecteur quelconque dont le support passe par G. Nous avons

$$\begin{aligned}\Phi_{(GK)} &= [(A_1B_1), (GK)] + [(A_2B_2), (GK)] + \ldots + [(A_nB_n), (GK)] \\ &= (\mathbf{A_1B_1}, \mathbf{A_1G}, \mathbf{GK}) + (\mathbf{A_2B_2}, \mathbf{A_2G}, \mathbf{GK}) + \ldots + (\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n, \mathbf{A}_n\mathbf{G}, \mathbf{GK}) \\ &= \lambda_1(\mathbf{V}, \mathbf{A_1G}, \mathbf{GK}) + \lambda_2(\mathbf{V}, \mathbf{A_2G}, \mathbf{GK}) + \ldots + \lambda_n(\mathbf{V}, \mathbf{A}_n\mathbf{G}, \mathbf{GK}) \\ &= (\mathbf{V}, \lambda_1\mathbf{A_1G} + \lambda_2\mathbf{A_2G} + \ldots + \lambda_n\mathbf{A}_n\mathbf{G}, \mathbf{GK}).\end{aligned}$$

Dans la parenthèse, le terme moyen est nul, d'après la définition du point G. On a donc

$$\Phi_{(GK)} = 0$$

quel que soit le vecteur (GK); le théorème est donc établi.

Nous ne développerons pas davantage la théorie des systèmes de vecteurs glissants équivalents, au point de vue de la géométrie linéaire. Nous allons revenir au point de vue de la géométrie métrique et définir une opération sur un vecteur glissant et un point. Nous parviendrons ainsi à la notion la plus classique du moment, et nous retrouverons par elle (sous une forme moins générale) les propriétés des systèmes de vecteurs équivalents.

105. Moment d'un vecteur par rapport à un point. — Soient un vecteur glissant (AB), de support Δ, et un point fixe O en dehors de Δ. On appelle

moment de (AB) par rapport au point O, un vecteur lié au point O et de grandeur vectorielle

$$\mathbf{OG} = \mathbf{OA} \wedge \mathbf{AB}. \tag{87}$$

Pour légitimer cette définition, il faut montrer que le choix du point A sur Δ est indifférent : en effet, substituons à A un autre point A_1 de Δ. Nous aurons

$$\mathbf{OA_1} = \mathbf{OA} + \mathbf{AA_1} = \mathbf{OA} + \lambda\mathbf{AB}.$$

En faisant le produit vectoriel par $\mathbf{AB}$, on trouve bien

$$\mathbf{OA_1} \wedge \mathbf{AB} = (\mathbf{OA} + \lambda\mathbf{AB}) \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{OA} \wedge \mathbf{AB}.$$

L'opération *moment* (vectoriel) est donc propre à un point et à un vecteur *glissant*. D'après la définition du produit vectoriel, nous aurons, pour tout vecteur libre $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{OG}.\mathbf{W} = (\mathbf{OA}, \mathbf{AB}, \mathbf{W}).$$

Considérons en particulier un point P tel que

$$\mathbf{OP} = \mathbf{W};$$

la relation précédente peut encore s'écrire

$$\mathbf{OG}.\mathbf{OP} = (\mathbf{OA}, \mathbf{AB}, \mathbf{OP}) = (\mathbf{OP}, \mathbf{OA}, \mathbf{AB}) = 6[(OP), (AB)].$$

On a donc le résultat essentiel

$$\frac{1}{6}\,\mathbf{OG}.\mathbf{OP} = [(OP), (AB)], \tag{88}$$

qui relie le moment vectoriel de (AB) par rapport à un point O et le moment scalaire de AB et de tout vecteur passant par le point O.

Faisons, sur le moment vectoriel, deux remarques importantes :

1° Un vecteur glissant est bien défini si l'on donne son moment par rapport à un point O et sa propre grandeur vectorielle, celle-ci étant astreinte à être orthogonale au moment.

2° On a, entre les grandeurs vectorielles des moments de (AB) par rapport à O et O′ la relation

$$\mathcal{M}^{\prime}_{O'}(AB) = \mathcal{M}^{\prime}_{O}(AB) + \mathcal{M}^{\prime}_{O'}(OC);$$

le point C étant tel que

$$\mathbf{OC} = \mathbf{AB}.$$

En effet, nous avons

$$\mathbf{O'A} = \mathbf{O'O} + \mathbf{OA},$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbf{O'A} \wedge \mathbf{AB} &= \mathbf{O'O} \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{OA} \wedge \mathbf{AB} \\ &= \mathbf{OA} \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{O'O} \wedge \mathbf{OC}. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}\end{aligned}$$

La distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition fournit en outre un résultat remarquable : considérons des vecteurs concourants AB_1, AB_2, . . . , AB_n. Considérons le point B tel que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AB_1} + \mathbf{AB_2} + \ldots + \mathbf{AB_n}.$$

Nous avons

$$\mathbf{OA} \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{OA} \wedge \mathbf{AB}_1 + \ldots + \mathbf{OA} \wedge \mathbf{AB}_n.$$

Donc

$$(89) \qquad \mathcal{M}'_0(AB) = \mathcal{M}'_0(AB_1) + \mathcal{M}'_0(AB_2) + \ldots + \mathcal{M}'_0(AB_n).$$

C'est le théorème de Varignon.

106. Application aux systèmes de vecteurs glissants. — Étant donné un système de vecteurs glissants

$$(A_1B_1),\ (A_2B_2),\ \ldots,\ (A_nB_n),$$

on appelle *moment résultant* de ce système par rapport à un point O un vecteur OG, lié au point O, dont la grandeur vectorielle est donnée par

$$\mathbf{OG} = \mathbf{OA}_1 \wedge \mathbf{A_1B_1} + \mathbf{OA}_2 \wedge \mathbf{A_2B_2} + \ldots + \mathbf{OA}_n \wedge \mathbf{A_nB_n}.$$

En appelant OP un vecteur quelconque issu de O, nous démontrerons comme précédemment que l'on a

$$(90) \quad \frac{1}{6}\mathbf{OG}.\mathbf{OP} = [(OP), (A_1B_1)] + [(OP), (A_2B_2)] + \ldots + [(OP), (A_nB_n)] = \Phi_{(OP)}.$$

Pour que deux systèmes soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient, pour tout vecteur (OP), même fonction caractéristique. D'après l'égalité (90), on peut encore dire :

Pour que deux systèmes soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même moment résultant par rapport à tout point de l'espace.

Or, dès qu'on connaît la somme géométrique et le moment résultant en un point O, on peut construire le moment résultant en tout autre point, indépendamment de la constitution du système, vecteur par vecteur.

En effet, entre les grandeurs vectorielles du moment résultant en O et du moment résultant en O′, nous avons la relation

$$(91) \qquad \mathbf{O'G'} = \mathbf{OG} + \mathcal{M}'_{0'}(OR),$$

le point R étant déterminé de manière que $\mathbf{OR}$ soit la somme géométrique.

Cette relation peut s'établir à l'aide des relations analogues concernant les moments par rapport à O et O′ des divers vecteurs du système en les combinant par addition membre à membre : d'après une remarque du numéro précédent, nous aurons à additionner les moments par rapport à O′ des vecteurs équipollents à $(A_1B_1), \ldots, (A_nB_n)$ menés par O, ce qui donnera, en vertu du théorème de Varignon, le moment par rapport à O′ de (OR).

On pourrait également regarder cette relation comme une conséquence de cette autre, précédemment obtenue,

$$\Phi_{(O'P')} = \Phi_{(OP)} + [(OR), (O'P')].$$

Ce qui est important, c'est qu'elle nous permet de donner aux conditions d'équivalence de deux systèmes une forme particulièrement simple :

Pour que deux systèmes soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même somme géométrique, et même moment résultant par rapport à un point particulier.

Pour un couple, le moment résultant a une grandeur géométrique constante. Pour un système équivalent à un vecteur unique, le moment résultant est orthogonal à la somme géométrique : que cette dernière ne soit pas nulle, et cette condition sera suffisante pour l'existence d'un vecteur glissant unique équivalent au système.

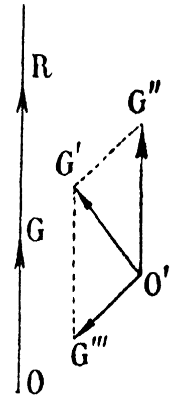
Les éléments vraiment nouveaux qui apparaissent dans la question par l'intervention du point de vue métrique se présentent naturellement lorsqu'on entreprend l'étude du champ vectoriel des moments résultants. Cette étude nous fournira en même temps un premier exemple de champ vectoriel. Aussi, allons-nous maintenant l'entreprendre.

107. Champ vectoriel des moments résultants. — Le lieu des points O′ où le moment résultant O′G′ a une grandeur géométrique constante (même grandeur géométrique qu'en O) se déduit immédiatement de la relation (91). D'après celle-ci, il suffit en effet d'exprimer que l'on a

$$\mathbf{O'O} \wedge \mathbf{OR} = 0.$$

Donc le lieu cherché est la droite OR elle-même, ou encore la parallèle à la somme géométrique menée par O. Bien entendu, nous écartons le cas où le système équivaudrait à un couple, cas où le moment résultant aurait même grandeur géométrique en tous les points de l'espace, et par conséquent même direction.

Ce cas étant toujours mis à part, il existe une droite et une seule en tous les points de laquelle le moment résultant est porté par cette droite. De la relation (91), il résulte que la direction de cette droite est celle de la somme géométrique. Le moment résultant est donc constant le long de cette droite. Choisissons-y un point quelconque O, soit OG le moment résultant en ce point, et déterminons un point R par la condition que OR ait pour grandeur vectorielle la somme géométrique. Il est alors intéressant d'appliquer la règle générale du numéro précédent à la construction du moment résultant en un autre point O′. Nous aurons à faire la somme géométrique de deux vecteurs :



1° le vecteur O′G″, équipollent à OG;

2° le vecteur O′G‴, moment par rapport à O′ de OR.

De cette construction découle immédiatement la propriété suivante :

Le champ vectoriel des moments résultants se superpose à lui-même :

1° dans toute translation le long de la droite OGR;

2° dans toute rotation autour de cette droite.

Pour rappeler ces caractères d'invariance, on donne à cette droite le nom d'*axe central*.

108. Complexe des droites de moment nul. — De la relation (91), on déduit aisément la constance de la projection sur une droite du moment résultant aux divers points de cette droite. Les droites de moment nul sont celles pour les-

quelles s'annule cette projection : cette définition concorde bien avec celle que nous en avons déjà donnée au n° 100, en vertu de la relation

$$\frac{1}{6}\mathbf{OG}.\mathbf{OP} = \Phi_{(OP)}.$$

Or, au point de vue actuel, on obtient aisément les propriétés essentielles des droites de moment nul. Tout d'abord, le complexe qu'elles forment se superpose à lui-même par toute translation parallèle à l'axe central ou toute rotation autour de cet axe. En second lieu, les droites de moment nul qui passent par un point O′ sont contenues dans le plan perpendiculaire en ce point au moment résultant correspondant O′G′. Ce plan s'appelle le *plan polaire* de O′. Toutes les droites de moment nul qui sont situées dans un plan Π passent par le point O′ de ce plan où le moment résultant est perpendiculaire à Π : ce point se détermine en prenant l'intersection du plan Π et de la parallèle à l'axe central, lieu des points où le moment résultant est dirigé suivant la normale au plan. Le point O′ s'appelle le pôle du plan Π. Si exceptionnellement le plan Π est parallèle à l'axe central, toute translation parallèle à cet axe le superpose à lui-même, on en déduit que les droites de moment nul contenues dans ce plan sont parallèles.

La notion la plus importante est ensuite celle de droites *conjuguées*. Soient deux points A et B, dont les plans polaires α et β se coupent suivant la droite (α, β). Toute droite issue de A et rencontrant (α, β) appartient au complexe; de même toute droite issue de B et rencontrant (α, β). Donc, le plan polaire de tout point de la droite (α, β) est déterminé par ce point et la droite AB. Il y a réciprocité entre les droites AB et (α, β). On leur donne le nom de droites conjuguées. Toute droite s'appuyant sur deux droites conjuguées est une droite de moment nul.

Cherchons, comme application, à trouver un système (*s*) équivalent à un système (S), et formé seulement de deux vecteurs glissants. La détermination de chaque vecteur glissant comporte cinq inconnues. Nous aurons en tout dix inconnues, et comme il y a six conditions d'équivalence, nous aurons seulement six équations. Donc le problème comporte une indétermination d'ordre quatre. Par exemple, pour achever de le déterminer, on pourra choisir arbitrairement le support d'un des vecteurs de *s*. Il est manifeste *a priori* que l'autre vecteur sera porté par la droite conjuguée, car toute droite s'appuyant sur les deux vecteurs de *s* sera une droite de moment nul.

Nous ne développerons pas davantage ces considérations.

La théorie du complexe linéaire, envisagée au point de vue actuel, est d'ailleurs un peu trop arbitrairement délimitée. Nous aurions pu généraliser un peu, il est vrai, et en donner une exposition valable dans le domaine de la géométrie linéaire. Mais cette théorie ne prend son complet épanouissement que lorsqu'on se place au point de vue de la géométrie projective et dualistique, et qu'on cherche systématiquement les groupes de transformations homographiques et corrélatives qui laissent un complexe linéaire invariant.

TROISIÈME PARTIE

OPÉRATIONS VECTORIELLES INFINITÉSIMALES

I

La dérivation géométrique.

109. Dérivée géométrique d'un vecteur. — Supposons qu'à chaque valeur d'un paramètre λ on fasse correspondre, suivant une loi déterminée, un vecteur libre **V**. Nous dirons que ce vecteur est fonction du paramètre λ, et nous l'écrirons occasionnellement

$$\mathbf{V}(\lambda).$$

Soit **V** le vecteur obtenu pour la valeur λ et $\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}$ le vecteur obtenu pour la valeur $\lambda + \Delta\lambda$. On dit que **V** admet une dérivée pour la valeur λ si le rapport

$$\frac{\Delta\mathbf{V}}{\Delta\lambda}$$

$\left(\text{ou mieux le produit de } \Delta\mathbf{V} \text{ par le scalaire } \frac{1}{\Delta\lambda}\right)$ possède une limite lorsque $\Delta\lambda$ tend vers zéro.

Au concept *vecteur libre* on peut substituer, dans la définition précédente, le *concept point*, pour aboutir en fin de compte à un résultat analogue : supposons qu'à chaque valeur d'un paramètre λ on fasse correspondre, suivant une loi déterminée, un point M. Nous dirons que ce point M est fonction du paramètre λ. Il décrit une courbe C.

Soit M le point obtenu pour la valeur λ et M′ le point obtenu pour la valeur $\lambda + \Delta\lambda$. De quelque manière qu'on choisisse un point fixe O, on a toujours

$$\mathbf{MM'} = \mathbf{OM'} - \mathbf{OM},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mathbf{MM'}}{\Delta\lambda} = \frac{\mathbf{OM'} - \mathbf{OM}}{\Delta\lambda},$$

égalité d'où il résulte que le vecteur **OM** a sa dérivée géométrique indépendante du choix du point O. Le vecteur qui la représente est dirigé suivant la tangente à C.

D'après sa définition même, *la dérivation géométrique a un sens parfaitement précis en géométrie linéaire, aussi bien qu'en géométrie métrique.*

Nous désignerons dans la suite la dérivée géométrique du vecteur **V** par rapport au paramètre λ par la notation

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda}.$$

Lorsque nous envisagerons un point M décrivant une courbe C, au lieu d'écrire

$$\frac{d(\mathbf{OM})}{d\lambda},$$

nous écrirons simplement

$$\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda},$$

pour bien marquer le rôle, purement apparent, joué par le point O.

En considérant la dérivée géométrique

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}$$

comme un vecteur libre fonction du paramètre λ et en prenant la dérivée géométrique de ce nouveau vecteur, nous serons conduits à la dérivée géométrique seconde, etc.

110. Calcul des dérivées géométriques. — Considérons des quantités scalaires et des vecteurs libres, qui, les uns et les autres, sont fonctions d'un paramètre λ. En les composant suivant les règles du calcul des vecteurs libres, nous obtiendrons soit des scalaires, soit des vecteurs libres, fonctions de λ. Nous devrons donc examiner les deux problèmes suivants :

1° Trouver la dérivée géométrique d'un vecteur, résultant d'opérations effectuées sur des vecteurs ou des scalaires, fonctions connues de λ.

2° Trouver la dérivée géométrique d'un scalaire, résultant d'opérations effectuées sur des vecteurs ou des scalaires, fonctions connues de λ.

Nous allons indiquer les théorèmes qui permettent de résoudre ces questions dans les cas les plus usuels.

THÉORÈME I. — *La dérivée géométrique de*

$$\mathbf{W} = \rho_1 \mathbf{V}_1 + \ldots + \rho_n \mathbf{V}_n,$$

où les ρ sont des scalaires fonctions de λ et les **V** *des vecteurs fonctions de λ, est*

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\lambda} = \rho_1 \frac{d\mathbf{V}_1}{d\lambda} + \ldots + \rho_n \frac{d\mathbf{V}_n}{d\lambda} + \frac{d\rho_1}{d\lambda}\mathbf{V}_1 + \ldots + \frac{d\rho_n}{d\lambda}\mathbf{V}_n.$$

En effet, l'accroissement géométrique d'une somme

$$\mathbf{U}_1(\lambda) + \ldots + \mathbf{U}_n(\lambda)$$

correspondant à l'accroissement $\Delta\lambda$ du paramètre est la somme des accroissements géométriques $\Delta \mathbf{U}_1, \ldots, \Delta \mathbf{U}_n$ des termes de la somme. Donc, la dérivée géométrique

d'une somme est égale à la somme des dérivées géométriques ; d'autre part, soit

$$\mathbf{U} = \rho \mathbf{V},$$

ρ et $\mathbf{V}$ désignant des fonctions de λ. On trouve aisément

$$\Delta \mathbf{U} = \rho \Delta \mathbf{V} + \Delta \rho\, \mathbf{V} + \Delta \rho\, \Delta \mathbf{V};$$

en divisant par $\Delta\lambda$ et passant à la limite, on trouve que le dernier terme du second membre tend vers zéro. On a donc

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\lambda} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} + \frac{d\rho}{d\lambda}\mathbf{V}.$$

Le théorème est donc démontré. Bien entendu, la rigueur exige, dans de tels énoncés, des précautions analogues à celles qui interviennent dans les propositions de même genre de l'analyse ordinaire. Il est nécessaire de spécifier que tous les scalaires ρ et tous les vecteurs $\mathbf{V}$ admettent des dérivées. Cette hypothèse est essentielle : nous nous contenterons de la mentionner ici une fois pour toutes.

Cas particulier. — Considérons un système fondamental fixe $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Un vecteur $\mathbf{V}$, fonction de λ, peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}.$$

En dérivant par rapport au paramètre λ, nous obtiendrons

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} = \frac{dx}{d\lambda}\mathcal{A} + \frac{dy}{d\lambda}\mathcal{B} + \frac{dz}{d\lambda}\mathcal{C}.$$

Ceci montre que si un vecteur a pour composantes x, y, z dans un système fondamental fixe, celles de sa dérivée géométrique sont $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{dz}{d\lambda}$.

Dans les raisonnements qui précèdent, nous avons adopté le point de vue de la géométrie linéaire. Revenant maintenant au point de vue métrique, nous allons indiquer le mécanisme de dérivation d'un produit vectoriel.

Théorème II. — *La dérivée du produit vectoriel*

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{V},$$

est donnée par

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\lambda} = \mathbf{U} \wedge \frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} + \frac{d\mathbf{U}}{d\lambda} \wedge \mathbf{V}.$$

En effet, donnons à λ un accroissement $\Delta\lambda$. Il en résulte pour $\mathbf{U}$ un accroissement $\Delta\mathbf{U}$, pour $\mathbf{V}$ un accroissement $\Delta\mathbf{V}$. L'accroissement de $\mathbf{G}$ est alors donné par

$$\Delta\mathbf{G} = (\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}) \wedge (\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}) - \mathbf{U}\mathbf{V}.$$

Grâce à la distributivité de l'opération « produit vectoriel » par rapport à l'addition, on a simplement

$$\Delta\mathbf{G} = \mathbf{U} \wedge \Delta\mathbf{V} + \Delta\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} + \Delta\mathbf{U} \wedge \Delta\mathbf{V}.$$

Il suffit alors de multiplier les deux membres par le scalaire $\frac{1}{\Delta\lambda}$ et de passer à la limite en remarquant que $\frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta\lambda}$ tend vers une limite (d'après une hypothèse sous-entendue dans l'énoncé) et que $\Delta \mathbf{V}$ tend vers zéro. La formule et sa démonstration ont donc la même forme que celles qui y correspondent en analyse ordinaire. Toutefois, il faut prendre garde de ne pas altérer l'ordre des termes.

Les deux théorèmes précédents se rattachent au premier ordre de questions signalées au début du n° 110 : calcul de la dérivée géométrique d'un vecteur libre, résultat d'opérations effectuées sur des scalaires ou des vecteurs libres fonctions de λ. Nous allons étudier maintenant quelques questions relatives à cet ordre d'idées : dérivation d'un scalaire provenant d'opérations effectuées sur des vecteurs ou des scalaires fonctions de λ.

111. Dérivation d'une fonction scalaire. — Si une fonction scalaire est formée à partir d'autres fonctions scalaires, sa dérivée est donnée par les règles ordinaires de l'analyse. Mais nous avons donné des exemples de fonctions scalaires provenant d'opérations sur des vecteurs :

1° le volume $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$ du parallélépipède construit sur trois vecteurs;

2° le produit scalaire $\mathbf{U}.\mathbf{V}$;

3° d'une manière générale, toute forme p fois linéaire de p vecteurs $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_p$.

Cette dernière opération contient les deux autres comme cas particulier. Donnons d'abord, à cause de son importance pour les applications, la dérivée d'un produit scalaire. Nous donnerons ensuite le moyen de dériver une forme linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs.

THÉORÈME. — *La dérivée du produit scalaire*

$$p = \mathbf{U}.\mathbf{V},$$

est donnée par la formule

$$\frac{dp}{d\lambda} = \mathbf{U}.\frac{d\mathbf{V}}{d\lambda} + \mathbf{V}.\frac{d\mathbf{U}}{d\lambda}.$$

On raisonne toujours de la même manière. Un accroissement $\Delta\lambda$ du paramètre entraîne pour $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ des accroissements $\Delta\mathbf{U}$ et $\Delta\mathbf{V}$ et pour leur produit scalaire p un accroissement Δp. Grâce à la propriété de distributivité, on a encore

$$\Delta p = \mathbf{U}.\Delta\mathbf{V} + \mathbf{V}.\Delta\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}.\Delta\mathbf{V}.$$

En divisant par $\Delta\lambda$ et passant à la limite, on obtient le résultat annoncé.

Soit maintenant une forme p fois linéaire de p vecteurs. Bornons-nous, pour simplifier l'écriture, à une forme trilinéaire de trois vecteurs

$$\varphi(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}),$$

qui sont fonctions du paramètre λ. En donnant à λ un accroissement $\Delta\lambda$, il en résultera pour $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ des accroissements $\Delta\mathbf{U}$, $\Delta\mathbf{V}$, $\Delta\mathbf{W}$, et pour φ l'accroissement

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = {} & \varphi(\Delta\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) + \varphi(\mathbf{U}, \Delta\mathbf{V}, \mathbf{W}) + \varphi(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \Delta\mathbf{W}) \\ & + \varphi(\mathbf{U}, \Delta\mathbf{V}, \Delta\mathbf{W}) + \varphi(\Delta\mathbf{U}, \mathbf{V}, \Delta\mathbf{W}) + \varphi(\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{V}, \mathbf{W}) + \varphi(\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{V}, \Delta\mathbf{W}).\end{aligned}$$

En divisant par $\Delta\lambda$, il vient

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}=\varphi\left(\frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta\lambda}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\right)+\varphi\left(\mathbf{U}, \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta\lambda}, \mathbf{W}\right)+\varphi\left(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \frac{\Delta \mathbf{W}}{\Delta\lambda}\right)$$
$$+\left[\varphi\left(\mathbf{U}, \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta\lambda}, \frac{\Delta \mathbf{W}}{\Delta\lambda}\right)+\varphi\left(\frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta\lambda}, \mathbf{V}, \frac{\Delta \mathbf{W}}{\Delta\lambda}\right)+\varphi\left(\frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta\lambda}, \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta\lambda}, \mathbf{W}\right)\right]\Delta\lambda$$
$$+\varphi\left(\frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta\lambda}, \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta\lambda}, \frac{\Delta \mathbf{W}}{\Delta\lambda}\right)\Delta\lambda^2;$$

le second membre est un polynome en $\Delta\lambda$ dont les coefficients possèdent (par hypothèse) des limites finies. Lorsque $\Delta\lambda$ tend vers zéro, nous aurons donc

$$(92)\qquad \frac{d\varphi}{d\lambda}=\varphi\left(\frac{d\mathbf{U}}{d\lambda}, \mathbf{V}, \mathbf{W}\right)+\varphi\left(\mathbf{U}, \frac{d\mathbf{V}}{d\lambda}, \mathbf{W}\right)+\varphi\left(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \frac{d\mathbf{W}}{d\lambda}\right).$$

Dérivation d'une forme quadratique, d'une forme cubique, etc... — La formule (92) permet, comme cas particulier, de trouver la dérivée d'un volume $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$ et le lecteur y rattachera bien aisément le mécanisme classique de dérivation d'un déterminant. Nous insisterons de préférence sur une autre application de la même formule.

Nous avons déjà remarqué le lien de dépendance qui existe entre une forme quadratique $Q(\mathbf{U})$ et sa forme polaire $P(\mathbf{U}, \mathbf{V})$. Cette dernière est une forme bilinéaire et symétrique des deux vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$. A l'aide de cette forme on retrouve la forme quadratique elle-même, en y faisant

$$\mathbf{V}=\mathbf{U},$$

de sorte que l'on a

$$P(\mathbf{U}, \mathbf{U})=Q(\mathbf{U}).$$

Or, lorsque nous avons établi à l'instant la dérivée d'une forme plurilinéaire, nous n'avons pas supposé spécialement que $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, ... soient des fonctions distinctes de λ. Le calcul de la dérivée de $Q(\mathbf{U})$ se confond donc avec celui de la dérivée de $P(\mathbf{U}, \mathbf{U})$, ce qui nous permet d'écrire

$$(93)\qquad \frac{dQ(\mathbf{U})}{d\lambda}=2P\left(\mathbf{U}, \frac{d\mathbf{U}}{d\lambda}\right).$$

On peut généraliser cette méthode de calcul et en déduire la dérivée d'une forme cubique, ou d'ordre supérieur. Bornons-nous à une forme cubique

$$C(\mathbf{U}).$$

Il existe une forme trilinéaire et une seule

$$B(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$$

des trois vecteurs $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, symétrique par rapport à ces trois vecteurs et se réduisant à $C(\mathbf{U})$ lorsqu'on y fait $\mathbf{V}=\mathbf{U}$ et $\mathbf{W}=\mathbf{U}$. On a alors

$$(94)\qquad \frac{dC(\mathbf{U})}{d\lambda}=3B\left(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \frac{d\mathbf{U}}{d\lambda}\right).$$

Ces résultats seront d'ailleurs, par la suite, susceptibles d'être rattachés à la théorie de la dérivation d'une fonction quelconque d'un vecteur libre, laquelle n'est qu'un aspect de la dérivation des fonctions composées de l'analyse ordinaire.

112. Vecteurs et points fonctions de plusieurs variables. — Suivant la même marche qu'en analyse, nous considérerons des vecteurs et des points fonctions de plusieurs variables, et nous en définirons les dérivées partielles. Soit par exemple un vecteur libre **V**, fonction des deux paramètres λ et μ. S'il admet une dérivée géométrique par rapport à l'un de ces paramètres λ, lorsqu'on donne à l'autre, μ, une valeur constante, nous représenterons cette dérivée par la notation

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \lambda},$$

et nous l'appellerons : *dérivée partielle du vecteur* **V** *par rapport au paramètre* λ. Les dérivées partielles du premier ordre, c'est-à-dire les deux vecteurs

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mu},$$

sont susceptibles d'admettre des dérivées géométriques, et ainsi de suite. Nous retrouvons ici le principe de l'indépendance de l'ordre des dérivations, qui n'exige pas une démonstration nouvelle, du fait que la dérivée géométrique d'un vecteur par rapport à un paramètre admet pour composantes (dans tout système fondamental) les dérivées des composantes de ce vecteur. Nous représenterons donc les dérivées secondes par

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mu^2},$$

et ainsi de suite.

Si un point M est fonction de deux paramètres λ, μ, ce point décrit une surface S. Les dérivées partielles successives du vecteur OM par rapport à ces paramètres sont toujours indépendantes du choix du point O : nous écrirons ces vecteurs sous la forme ci-dessous :

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial M}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}, \quad \text{etc....}$$

Les deux vecteurs $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$ déterminent le plan tangent en M à la surface S.

On généralise aussi très facilement la notion de différentielle totale ; nous écrirons par exemple, dans les deux cas précédents,

$$d\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mu} d\mu,$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial M}{\partial \mu} d\mu.$$

Soient deux vecteurs **H** et **K** dépendant de λ et de μ. L'expression vectorielle

$$\mathbf{H}d\lambda + \mathbf{K}d\mu$$

n'est une différentielle totale que si l'on a

$$(95) \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mu} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \lambda};$$

cette égalité vectorielle équivaut à trois égalités scalaires qui expriment les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que les composantes de $\mathbf{H}d\lambda + \mathbf{K}d\mu$ soient des différentielles totales. Donc la condition (95) est elle-même nécessaire et suffisante.

113. Extension de la formule de Taylor. — L'analyse nous apprend à substituer à une fonction scalaire des paramètres λ, μ, soit un développement limité de Taylor, soit, dans des cas favorables, un développement en série entière procédant suivant les puissances de $\lambda - \lambda_0$ et $\mu - \mu_0$. Ce dernier mode d'expression est l'apanage des fonctions qui sont holomorphes autour du système de valeurs λ_0, μ_0 [1].

Le calcul vectoriel fournit une généralisation partielle des développements limités et généralise entièrement la notion des fonctions développables autour d'un système de valeurs par celle de vecteur fonction holomorphe d'un ou plusieurs paramètres (autour d'une valeur ou d'un système de valeurs).

Montrons d'abord pourquoi il est impossible de généraliser entièrement la théorie des développements limités. Prenons pour simplifier un point M fonction de l'unique paramètre λ. Pour une fonction scalaire $f(\lambda)$, la formule de Taylor, limitée au premier ordre de dérivation (ou formule des accroissements finis), s'écrirait

$$f(\lambda + h) - f(\lambda) = hf'(\lambda + \theta h),$$

θ étant un nombre compris entre 0 et 1. Pour le vecteur $\mathbf{OM} = \mathbf{V}(\lambda)$, dont la dérivée géométrique est $\mathbf{V}'(\lambda)$, on n'a pas le droit d'écrire

$$\mathbf{V}(\lambda + h) - \mathbf{V}(\lambda) = h\mathbf{V}'(\lambda + \theta h);$$

en effet, considérons un système fondamental **OA**, **OB**, **OC** indépendant de λ, et soit

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC},$$

x, y, z sont des fonctions de λ. Si nous calculons les trois accroissements finis

$$x(\lambda + h) - x(\lambda), \qquad y(\lambda + h) - y(\lambda), \qquad z(\lambda + h) - z(\lambda),$$

nous trouverons pour leurs valeurs respectives

$$hx'(\lambda + \theta_1 h), \qquad hy'(\lambda + \theta_2 h), \qquad hz'(\lambda + \theta_3 h),$$

les quantités θ_1, θ_2, θ_3 ayant en général des valeurs différentes. L'égalité précédente est impossible. D'ailleurs, on peut remarquer aussi qu'étant donnée une corde MM_1 de la courbe C décrite par le point M, il n'existe en général sur l'arc MM_1 aucun point μ où la tangente soit parallèle à MM_1.

(1) L'épithète *holomorphe* signifie : développable en série entière par rapport à $\lambda - \lambda_0$ et $\mu - \mu_0$.

Par conséquent, nous n'avons pas le droit de généraliser ici les propriétés de ce qu'on appelle couramment le terme complémentaire. En revanche, il nous est permis de condenser les trois égalités scalaires

$$x(\lambda+h)=x(\lambda)+hx'(\lambda)+\frac{h^2}{2!}x''(\lambda)+\ldots+\frac{h^n}{n!}[x^{(n)}(\lambda)+\xi],$$
$$y(\lambda+h)=y(\lambda)+hy'(\lambda)+\frac{h^2}{2!}y''(\lambda)+\ldots+\frac{h^n}{n!}[y^{(n)}(\lambda)+\eta],$$
$$z(\lambda+h)=z(\lambda)+hz'(\lambda)+\frac{h^2}{2!}z''(\lambda)+\ldots+\frac{h^n}{n!}[z^{(n)}(\lambda)+\zeta],$$

où ξ, η, ζ sont des infiniment petits lorsque h est lui-même infiniment petit, en une égalité vectorielle, que nous écrirons sous l'une des formes

$$\mathbf{V}(\lambda+h)=\mathbf{V}(\lambda)+h\,\mathbf{V}'(\lambda)+\frac{h^2}{2!}\mathbf{V}''(\lambda)+\ldots+\frac{h^n}{n!}[\mathbf{V}^{(n)}(\lambda)+\omega],$$

ou

$$\mathrm{M}_1(\lambda+h)=\mathrm{M}(\lambda)+h\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2\mathrm{M}}{d\lambda^2}+\ldots+\frac{h^n}{n!}\left[\frac{d^n\mathrm{M}}{d\lambda^n}+\omega\right],$$

suivant qu'il s'agit d'un vecteur libre ou d'un point, ω désignant dans l'une et l'autre de ces formules un vecteur qui tend vers zéro en même temps que h.

En supposant que l'on ait un vecteur libre $\mathbf{V}$ ou un point M, qui dépendent de deux paramètres λ et μ, on pourra écrire de même

$$\mathbf{V}(\lambda+h,\mu+k)=\mathbf{V}(\lambda,\mu)+h\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\lambda}+k\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mu}+\ldots+\frac{1}{n!}\left[h\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\lambda}+k\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mu}\right]^{(n)}+\Omega,$$

ou

$$\mathrm{M}_1(\lambda+h,\mu+k)=\mathrm{M}(\lambda,\mu)+h\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\lambda}+k\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mu}+\ldots+\frac{1}{n!}\left[h\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\lambda}+k\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mu}\right]^{(n)}+\Omega,$$

les élévations aux puissances symboliques ayant le même sens qu'en analyse ordinaire, et Ω désignant un vecteur soumis à la restriction suivante : lorsqu'on établit une dépendance entre k et h telle que le rapport $\frac{k}{h}$ tende vers une limite finie et non nulle, le rapport $\frac{\Omega}{h^n}$ tend vers zéro avec h.

La notion de vecteur fonction holomorphe d'un ou plusieurs paramètres peut se définir de la manière suivante : le vecteur $\mathbf{V}(\lambda,\mu)$ par exemple sera holomorphe au voisinage du système de valeurs λ_0, μ_0 si ses composantes dans un système fondamental particulier sont holomorphes autour de λ_0, μ_0 : il est clair que cette propriété ne peut avoir lieu dans un système fondamental sans avoir lieu en même temps dans tous les autres. Les composantes du vecteur dans un système déterminé sont alors développables en des séries procédant suivant les puissances de $\lambda-\lambda_0$ et $\mu-\mu_0$. On peut condenser ces développements en un développement vectoriel unique et écrire

$$\mathbf{V}(\lambda,\mu)=\mathbf{V}(\lambda_0,\mu_0)+(\lambda-\lambda_0)\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\lambda_0}+(\mu-\mu_0)\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mu_0}+\ldots+\frac{(\lambda-\lambda_0)^\alpha(\mu-\mu_0)^\beta}{\alpha!\,\beta!}\frac{\partial^{\alpha+\beta}\mathbf{V}}{\partial\lambda_0^\alpha\partial\mu_0^\beta}+\ldots.$$

Dans un ordre d'idées analogue, si les coordonnées de M dans un système fondamental sont fonctions holomorphes de λ, μ autour de λ_0, μ_0, nous pourrons écrire

$$\mathbf{M}_0\mathbf{M} = (\lambda - \lambda_0)\frac{\partial M_0}{\partial \lambda_0} + (\mu - \mu_0)\frac{\partial M_0}{\partial \mu_0} + \ldots + \frac{(\lambda - \lambda_0)^\alpha (\mu - \mu_0)^\beta}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{\alpha+\beta} M_0}{\partial \lambda_0^\alpha \partial \mu_0^\beta} + \ldots .$$

Dans ces conditions, on dit encore que la multiplicité lieu du point M (qui est ici une surface) est *analytique* au voisinage du point M_0. Le bénéfice de ces notations nous apparaîtra sans tarder.

Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à l'étude des propriétés des courbes gauches, puis des surfaces, en nous limitant à l'espace à trois dimensions et adoptant exclusivement le point de vue métrique.

II

Les propriétés métriques des courbes gauches.

114. Position du problème. — Étant donnée une courbe C, il existe une infinité de manières d'en définir un point en fonction d'un paramètre. Supposons que le point M soit fonction du paramètre λ ; si nous posons

$$\lambda = \varphi(\lambda_1),$$

nous pourrons considérer le point M comme fonction du paramètre λ_1. Cela ne modifiera pas la courbe C décrite par le point M : il n'y aura changement que dans la manière d'individualiser les points de C à l'aide des valeurs du paramètre, ou, pour parler plus brièvement, dans la manière de *paramétrer*.

Dès qu'on aborde l'étude d'une courbe au point de vue métrique, il se présente un mode de paramétrage privilégié, celui qui consiste à situer un point de la courbe par la valeur algébrique de son abscisse curviligne : cela suppose qu'on ait fait choix sur la courbe C d'un sens positif et d'une origine des arcs. Soit A cette origine. Posons

$$\widetilde{AM_0} = s_0 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{AM} = s.$$

Nous aurons

$$(96) \quad \mathbf{M}_0\mathbf{M} = (s - s_0)\left(\frac{dM}{ds}\right)_0 + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2M}{ds^2}\right)_0 + \ldots + \frac{(s-s_0)^n}{n!}\left(\frac{d^nM}{ds^n}\right)_0 + \ldots,$$

si nous supposons que la courbe est analytique autour du point M_0 et qu'en outre ce point est un point régulier de la courbe [1].

[1] Au numéro précédent, nous avons appelé *courbe analytique* une courbe définie par un développement taylorien convergent

$$\mathbf{M}_0\mathbf{M} = (\lambda - \lambda_0)\left(\frac{dM}{d\lambda}\right)_0 + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2M}{d\lambda^2}\right)_0 + \ldots + \frac{(\lambda - \lambda_0)^n}{n!}\left(\frac{d^nM}{d\lambda^n}\right)_0 + \ldots .$$

De même qu'une fonction analytique est localement déterminée par la suite de ses dérivées en un point, de même une courbe analytique est connue au voisinage d'un point régulier si l'on donne la suite des dérivées géométriques

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2M}{ds^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^3M}{ds^3}\right)_0, \quad \cdots\cdot$$

Nous allons montrer que cette suite est entièrement déterminée en un point, dès qu'on connaît sur un arc de C contenant ce point deux fonctions remarquables de l'abscisse curviligne de ce point, la courbure et la torsion. Ces fonctions vont être définies à l'instant.

Sous la réserve qu'il faut établir la convergence du développement (96), lorsque la courbure et la torsion sont données, en fonction de s, nous arriverons à cette conclusion :

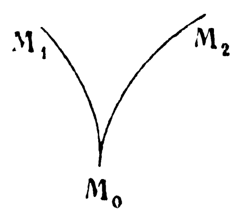
Une courbe C *est connue, à un déplacement près, si l'on donne la courbure et la torsion en fonction de l'abscisse curviligne.*

115. Indicatrice des tangentes. Courbure. — Considérons d'abord la dérivée géométrique

$$\mathbf{T} = \frac{dM}{ds}$$

en un point M quelconque de la courbe C, d'abscisse curviligne s. Le vecteur $\mathbf{T}$ est porté par la tangente en M; en outre si ds est positif, le point M subit un déplace-

Lorsque $\left(\frac{dM}{d\lambda}\right)_0$ s'annule, si $\left(\frac{d^2M}{d\lambda^2}\right)_0$ n'est pas nul, la courbe présente au point M_0 un point de rebroussement, parce que le vecteur $\mathbf{M_0M}$ est un infiniment petit équivalent au vecteur $\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2M}{d\lambda^2}\right)_0$ qui varie avec λ, en restant colinéaire à l'une de ses positions et en conservant toujours le même sens.



Nous excluons de nos considérations les points de rebroussement par le seul fait d'énoncer que $\mathbf{M_0M}$ admet un développement de la forme (96). Un tel développement n'existe pas au voisinage d'un point de rebroussement. En effet, soit un arc comportant un point de rebroussement M_0, et obtenu en faisant croître λ de λ_1 à λ_2. Nous supposons essentiellement que M se déplace alors, en marchant toujours dans le même sens, de M_1 en M_0, puis de M_0 en M_2 (M_0 correspondant à la valeur λ_0). Prenons pour sens des s croissants celui des λ croissants. Par hypothèse, nous avons

$$\mathbf{M_0M} = \frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2M}{d\lambda^2}\right)_0 + \cdots\cdot$$

L'arc s se calcule en fonction de λ par la formule

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{\left(\frac{dM}{d\lambda}\right)^2} = \left|\frac{dM}{d\lambda}\right|,$$

(en employant le symbole ordinaire de la valeur absolue pour désigner la longueur d'un vecteur). Donc

$$\frac{ds}{d\lambda} = |\lambda-\lambda_0|\left|\frac{d^2M}{d\lambda^2}\right|_0 \varphi(\lambda-\lambda_0),$$

φ désignant une série entière; donc $s - s_0$ n'est pas une fonction holomorphe de $\lambda-\lambda_0$, et par suite $\mathbf{M_0M}$ ne sera pas fonction holomorphe de $s - s_0$.

ment ΔM dans le sens des arcs croissants, déplacement dont l'amplitude est un infiniment petit équivalent à ds. Il en résulte que le vecteur **T** a pour longueur **1** et qu'il est porté par la demi-tangente dans le sens des arcs croissants.

Considérons maintenant la dérivée géométrique

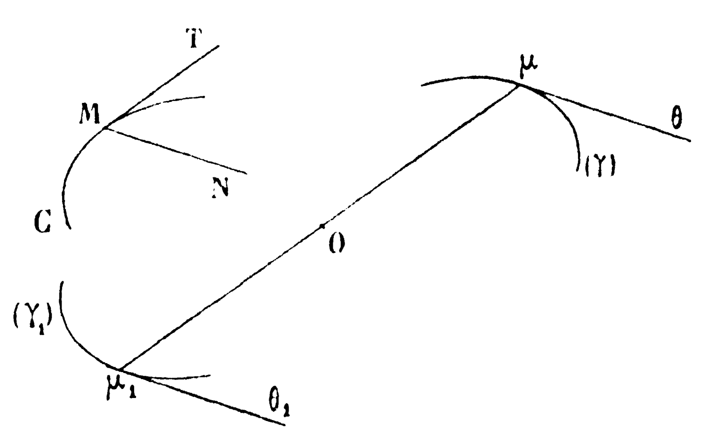
$$\frac{d^2M}{ds^2}.$$

Elle est égale à la dérivée géométrique du vecteur **T**. Pour déterminer cette dernière, prenons un point fixe O, et pour chaque position de M sur C déterminons le point m tel que l'on ait

$$\mathbf{Om} = \mathbf{T}.$$

Le point m décrit une courbe qu'on appelle l'*indicatrice des tangentes* de la courbe C. Soit (γ) cette indicatrice.

Le cône engendré par Om, c'est-à-dire le cône (Γ) des tangentes à la courbe C a pour plan tangent le long de Om un plan parallèle au plan osculateur à la courbe C en M. Comme Om est normal à la sphère, la tangente en m à (γ) est parallèle à la normale principale en M à C (c'est-à-dire à la normale contenue dans le plan osculateur). Soit $m\,\theta$ cette tangente, orientée de manière que m se déplace dans le sens $m\theta$ lorsque M se déplace dans le sens MT. Soit MN la portion de la normale principale qui est de même sens que $m\theta$. Je dis que cette demi-droite MN est indépendante du sens de parcours de C. En effet, en modifiant ce sens, on remplace m par son symétrique par rapport à O, et (γ) par la courbe (γ_1) symétrique par rapport à O. Mais sur (γ) et (γ_1), nous devons considérer non pas des sens de parcours associés dans cette symétrie, mais, au contraire, un sens sur (γ) et le sens inverse du sens associé par symétrie sur (γ_1), à cause du changement de sens sur C. Ceci nous conduit à deux demi-tangentes $m\theta$ et $m_1\theta_1$ parallèles et de même sens.



Il y a donc, sur la normale principale, un sens MN doué d'une signification intrinsèque. Ce sens, c'est d'ailleurs celui de la concavité en M. C'est ce que l'on peut voir simplement en prenant pour point O, centre de la sphère qui porte l'indicatrice, le point M lui-même : MT est alors une demi-génératrice du cône des tangentes de sommet M. Par rapport à un plan passant par MT et distinct du plan osculateur, les demi-génératrices de ce cône immédiatement antérieures à MT sont d'un côté différent de l'arc de C qui avoisine immédiatement le point M ; les génératrices immédiatement postérieures sont du même côté que cet arc. Donc une demi-génératrice qui décrit ce cône, dans un sens associé au sens de parcours de C, passe de la région de la convexité dans celle de la concavité. La propriété énoncée en résulte.

Convenons alors de désigner par **N** le vecteur libre, de longueur égale à l'unité, qui a pour direction et pour sens la direction et le sens de MN. Nous pouvons écrire, d'après ce qui précède,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \rho \mathbf{N}, \tag{97}$$

ρ désignant un scalaire positif. Pour déterminer ρ, il suffit de le considérer comme résultat d'un passage à la limite. Quand s s'accroît de Δs, le point M vient en M_1 et le point m en m_1. Nous aurons donc

$$\frac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta s} = \frac{\mathbf{O m_1} - \mathbf{O m}}{\Delta s} = \frac{\mathbf{m m_1}}{\Delta s},$$

ρ est la longueur de $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$, et par suite la limite de celle de $\frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta s}$, c'est-à-dire de

$$\frac{\text{corde } mm_1}{\text{arc } MM_1}.$$

La corde mm_1 est un infiniment petit équivalent à l'arc de grand cercle qui joint m et m_1 sur la sphère, ou encore à l'angle de contingence mOm_1. En divisant cet angle par l'arc MM_1, on obtient un rapport dont la limite est, par définition, la courbure en M. Par conséquent, le scalaire ρ désigne précisément la courbure en M. Son inverse $\frac{1}{R}$ s'appelle le rayon de courbure.

Nous connaissons ainsi la signification de $\frac{d^2M}{ds^2}$, et il s'agit maintenant d'étudier les éléments nouveaux qui se présentent dans l'expression des dérivées d'ordre supérieur $\frac{d^3M}{ds^3}$, $\frac{d^4M}{ds^4}$, etc.... Pour calculer $\frac{d^3M}{ds^3}$, nous devons, d'après la relation (97), qui donne $\frac{d^2M}{ds^2}$, chercher $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$. Nous ne résoudrons pas ce problème directement : il sera plus commode de faire intervenir le vecteur **B**, de longueur unité, orthogonal à la fois à **T** et **N**, et tel que le trièdre MT, MN, MB, dont les arêtes successives sont parallèles à **T**, **N**, **B** et de même sens, soit direct. La droite MB, perpendiculaire au plan osculateur en M, s'appelle la *binormale* en ce point à la courbe C.

Si nous connaissons $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$, nous en déduirons aisément $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$, en nous appuyant sur l'égalité

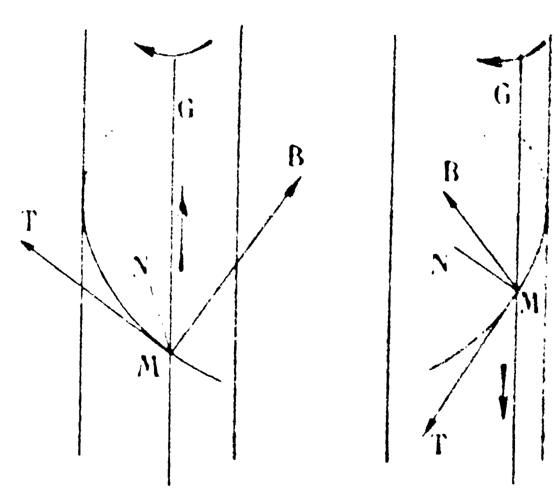
$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}.$$

Nous allons donc nous proposer de déterminer $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$.

116. Indicatrice des binormales. Torsion. — Pour déterminer la dérivée géométrique $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$, nous menons par le point O un vecteur $O\beta$ équipollent à **B**. Le point β décrit, sur la sphère de centre O et de rayon 1, une courbe (γ_1), appelée *indicatrice des binormales*, de C. Le cône (Γ_1), engendré par $O\beta$, est le

cône supplémentaire du cône (Γ) des tangentes à C, car il est le lieu des normales au cône (Γ) menées par son sommet O. Donc, en vertu des propriétés de réciprocité de (Γ) et de (Γ_1), le plan tangent à (Γ_1) le long de Oβ est perpendiculaire à Om. Donc la tangente en β à la courbe (γ_1) est située dans le plan perpendiculaire en β à Oβ, et dans le plan perpendiculaire en O à Om : elle est donc parallèle à MN.

Lorsque M se déplace sur C dans le sens positif, ou bien le déplacement correspondant de β sur (γ_1) est de même sens que MN, ou bien il est de sens contraire. Les deux éventualités sont possibles, comme on le voit en examinant le cas où C est une hélice circulaire. Les cônes (Γ) et (Γ_1) sont alors des cônes de révolution, les courbes (γ) et (γ_1) sont des circonférences, tandis que la binormale MB est dans le plan tangent. Supposons, pour simplifier le langage, l'axe de l'hélice vertical. Il y aura deux cas possibles, suivant que le mobile décrivant la courbe, et entraîné par une génératrice du cylindre qui tourne uniformément autour de l'axe dans le sens des aiguilles d'une montre, monte ou descend le long de cette génératrice. Dans les deux cas, le trièdre MTNB étant direct, on obtient les résultats suivants :



1[er] Cas. (γ) et (γ_1) étant regardés par en haut, μ décrit (γ) dans le sens des aiguilles d'une montre et β décrit (γ_1) en sens contraire, car la génératrice MG traverse l'angle TMB.

2[e] Cas. (γ) et (γ_1) étant toujours regardés par en haut, μ et β tournent tous deux dans le sens des aiguilles d'une montre, car la génératrice MG ne traverse pas l'angle TMB.

Revenons au cas général d'une courbe C absolument quelconque. Nous aurons une égalité vectorielle de la forme

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau \mathbf{N}, \tag{98}$$

τ étant une quantité scalaire positive ou négative, qu'on nomme TORSION de la courbe C au point M. Quelle en est l'interprétation géométrique?

Pour le signe, ce sera le signe + ou le signe —, suivant que le sens de parcours de (γ_1), qui correspond naturellement au sens de parcours de C, concorde ou non avec le sens positif de la normale principale à C au point correspondant[1].

Pour la valeur absolue, en opérant comme plus haut, nous serons amenés à regarder $|\tau|$ comme la limite du rapport de l'angle des deux binormales en M et M_1 à l'arc MM_1.

(1) On peut dire encore que le signe de τ indique le sens dans lequel le plan osculateur tend à tourner autour de la tangente, lorsque celle-ci progresse dans le sens de parcours positif de C.

117. Dérivée géométrique du vecteur N. — Revenons alors au calcul de la dérivée géométrique du vecteur **N**. En vertu des hypothèses faites sur les vecteurs **T**, **N**, **B**, nous avons

$$\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{N} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{T}, \qquad \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{N}.$$

Nous aurons $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ en dérivant la dernière de ces égalités géométriques. Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \wedge \mathbf{T} + \mathbf{B} \wedge \frac{d\mathbf{T}}{ds},$$

ou, en utilisant les relations (97) et (98),

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau \mathbf{N} \wedge \mathbf{T} + \rho \mathbf{B} \wedge \mathbf{N} = -(\tau \mathbf{B} + \rho \mathbf{T}),$$

d'où la formule définitive

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\rho \mathbf{T} - \tau \mathbf{B}. \tag{99}$$

118. Dérivées successives de M **par rapport à l'arc** s. — Les quatre formules fondamentales

$$\frac{d\mathrm{M}}{ds} = \mathbf{T},$$
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \rho \mathbf{N},$$
$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau \mathbf{N},$$
$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\rho \mathbf{T} - \tau \mathbf{B},$$

qu'on nomme encore formules de Frenet, nous mettent en mesure de décomposer les dérivées géométriques successives

$$\frac{d\mathrm{M}}{ds}, \quad \frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2}, \quad \frac{d^3\mathrm{M}}{ds^3}, \quad \frac{d^4\mathrm{M}}{ds^4}, \ \ldots, \text{ etc}\ldots$$

suivant les vecteurs fondamentaux **T**, **N**, **B**. Nous aurons

$$\frac{d\mathrm{M}}{ds} = \mathbf{T}, \qquad \frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2} = \rho \mathbf{N}, \qquad \frac{d^3\mathrm{M}}{ds^3} = \frac{d\rho}{ds}\mathbf{N} - \rho^2 \mathbf{T} - \rho\tau \mathbf{B},$$

$$\frac{d^4\mathrm{M}}{ds^4} = \left(\frac{d^2\rho}{ds^2} - \rho^3 - \rho\tau^2\right)\mathbf{N} - 3\rho\frac{d\rho}{ds}\mathbf{T} - \left[2\tau\frac{d\rho}{ds} + \rho\frac{d\tau}{ds}\right]\mathbf{B};$$

d'une manière générale, si l'on a obtenu

$$\frac{d^k\mathrm{M}}{ds^k} = u\mathbf{T} + v\mathbf{N} + w\mathbf{B},$$

u, v, w étant des fonctions de ρ, τ et de leurs dérivées par rapport à s, on en déduira, à l'aide du processus ordinaire de dérivation et des formules de Frenet, une expression analogue pour

$$\frac{d^{k+1}\mathbf{M}}{ds^{k+1}}.$$

Donc, si ρ et τ sont des fonctions analytiques connues de s, pour la valeur s_0 de ce paramètre, nous pourrons trouver pour $\mathbf{M_0M}$ un développement formel du type (96) dont les coefficients se déduisent de ceux des développements de ρ et τ par des opérations algébriques et entières. Ce développement, dont nous ne discuterons pas ici la convergence, fournit la décomposition de $\mathbf{M_0M}$ suivant les vecteurs fondamentaux $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{B}_0$. Si nous admettons la convergence de (96), nous obtenons donc ce résultat, déjà annoncé :

La courbure et la torsion de la courbe C la déterminent à une transformation métrique près : cette transformation métrique est d'ailleurs forcément un déplacement d'après nos conventions très précises sur le signe de la torsion.

119. Enveloppe du plan normal. Centre de courbure. — Le plan normal en M à la courbe C est le lieu des points P tels qu'on ait

$$\mathbf{T}.\mathbf{MP} = 0.$$

La caractéristique de ce plan s'obtiendra en adjoignant l'équation dérivée par rapport à s. Seuls, le vecteur $\mathbf{T}$ et le point M dépendent du paramètre s. Cette équation est donc

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}.\mathbf{MP} - \mathbf{T}.\frac{d\mathbf{M}}{ds} = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\rho\mathbf{N}.\mathbf{MP} = 1,$$

d'où

$$\mathbf{N}.\mathbf{MP} = \mathrm{R}.$$

Par suite, la caractéristique cherchée est l'intersection du plan normal avec le plan perpendiculaire à la normale principale mené par le point ω de cette droite tel que

$$\mathrm{M}\omega = \mathrm{R}$$

(ce point ω se trouvant sur la portion MN). Ce point ω joue donc un rôle actif dans la recherche de la génératrice de contact du plan normal avec son enveloppe. Cette génératrice est la perpendiculaire menée par ω au plan osculateur : on l'appelle *droite polaire* ou *axe de courbure*.

Le point ω a reçu le nom de *centre de courbure* de la courbe au point M.

120. Développées d'une courbe gauche. — Les normales à une courbe gauche en un même point forment une famille à un paramètre, contenue dans le plan normal. Donc toutes les normales constituent une famille à deux paramètres. Cherchons à grouper ces normales en familles à un paramètre, de manière que chaque famille admette une enveloppe E.

La question se résout aisément à l'aide des considérations précédentes. Repre-

nons un point M quelconque de la courbe C et reprenons le trièdre MT, MN, MB. Soit Mν une normale quelconque au point M; elle est située dans le plan MNB. Donc le vecteur unité ν de cette normale (1) peut s'écrire

$$\nu = \mathbf{N}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta, \tag{100}$$

en posant

$$(\mathbf{N}, \nu) = \theta,$$

le sens positif des rotations étant défini par la demi-droite MT. Écrivons que la droite Mν admet une enveloppe E, qu'elle touche en un point m, tel que

$$\mathbf{Mm} = l\nu. \tag{101}$$

Il suffit d'exprimer pour cela que $\frac{dm}{ds}$ est proportionnel à ν, ou encore que l'on a

$$\frac{dm}{ds} = h\nu;$$

or nous tirons de (101)

$$\frac{dm}{ds} = \mathbf{T} + \frac{dl}{ds}\nu + l\frac{d\nu}{ds},$$

ou, en vertu de la formule (100) et des formules de Frenet,

$$\begin{aligned}\frac{dm}{ds} &= \mathbf{T} + \frac{dl}{ds}(\mathbf{N}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta) + l\frac{d}{ds}(\mathbf{N}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta)\\ &= \mathbf{T}(1 - \rho l\cos\theta) + \nu\frac{dl}{ds} + l\left(\tau - \frac{d\theta}{ds}\right)(\mathbf{N}\sin\theta - \mathbf{B}\cos\theta);\end{aligned}$$

pour que le second membre soit de la forme $h\nu$, il faut et il suffit que l'on ait

$$1 - \rho l\cos\theta = 0, \tag{102}$$

$$\tau - \frac{d\theta}{ds} = 0. \tag{103}$$

(On remarquera en effet que les trois vecteurs $\mathbf{T}$, ν, $\mathbf{N}\sin\theta - \mathbf{B}\cos\theta$ forment un système fondamental orthogonal et normal, donc ici les composantes de $\frac{dm}{ds}$ suivant les deux vecteurs extrêmes doivent être nulles.) La relation (102) nous montre que l'on doit avoir

$$l = \frac{\mathrm{R}}{\cos\theta},$$

c'est-à-dire que le point de contact m doit être situé sur la droite polaire relative au point M. Quant à la relation (103)

$$\frac{d\theta}{ds} = \tau,$$

(1) Le lecteur qui craindrait d'oublier que la lettre ν désigne un vecteur pourra au préalable la surmonter partout d'une petite flèche.

elle définit la loi de variation qu'il convient d'imposer à l'angle θ pour que les normales admettent une enveloppe. Il est manifeste que le problème se résout par une quadrature. On en tire la conclusion suivante : considérons une première famille de normales admettant une enveloppe. Pour en déduire une autre famille possédant la même propriété, il suffit de faire subir à chaque droite de la première famille, dans le plan normal correspondant, autour de son point d'incidence, une rotation d'un angle constant.

Considérons en particulier une courbe plane : ses normales situées dans son plan ont une enveloppe, qui constitue la développée principale. Pour obtenir les autres développées, nous devrons considérer les normales qui font avec le plan de la courbe un angle constant : toutes ces droites sont tangentes au cylindre ayant pour base la développée principale et pour direction de génératrices la perpendiculaire au plan de la courbe donnée. Puisqu'elles ont une enveloppe, cette enveloppe est une ligne de ce cylindre. Puisque les tangentes à cette ligne font un angle constant avec les génératrices du cylindre, la ligne en question est une hélice. D'où ce résultat :

Toutes les développées d'une courbe plane sont des hélices tracées sur le cylindre ayant pour section droite la développée principale.

121. Développantes d'une courbe gauche. — Soit une courbe (E), sur laquelle nous prenons une origine des arcs a et un point m. Soit

$$\sigma = \overset{\frown}{am};$$

appelons $\mathbf{t}$ le vecteur unité de la tangente en m, dans le sens positif des arcs sur (E), et considérons le point M tel que

$$\mathbf{mM} = -\sigma\mathbf{t}; \tag{104}$$

c'est-à-dire obtenu en portant sur la portion négative de la tangente une longueur mM égale à l'arc aM. On dit que le point M décrit une développante de la courbe (E). Cherchons la tangente à la courbe lieu du point M. Nous aurons, en différentiant la relation,

$$d\mathrm{M} - dm = -d\sigma\mathbf{t} - \sigma\mathbf{dt}.$$

Or nous avons

$$\frac{dm}{d\sigma} = \mathbf{t}.$$

Donc la relation précédente se réduit et peut s'écrire, grâce à l'une des formules de Frenet,

$$d\mathbf{M} = -\sigma\mathbf{dt} = -\sigma\rho\,\mathbf{n}\,d\sigma,$$

ce qui montre que la tangente en M à la développante (C) est parallèle au vecteur $\mathbf{n}$, c'est-à-dire à la normale principale en m à la courbe (E). Il s'ensuit que Mm est une normale à la courbe (C). Toutes les normales telles que Mm forment une famille admettant la courbe (E) comme enveloppe. Donc, la courbe (E) est une développée de la courbe (C).

III

Les propriétés métriques des surfaces.

122. Position du problème. — Pour définir une surface, on en donne un point quelconque en fonction de deux paramètres λ et μ. Il y a une infinité de manières de paramétrer une surface déterminée : on passe d'un premier mode de représentation à un second en posant

$$(105)\qquad \begin{cases} \lambda = \varphi(\lambda_1, \mu_1), \\ \mu = \psi(\lambda_1, \mu_1). \end{cases}$$

Le problème que nous abordons se distingue essentiellement de celui que nous venons de résoudre pour les courbes : en effet, ici, même au point de vue métrique, aucun mode de représentation privilégié ne retient l'attention d'une façon spéciale[1].

Nous devons donc adopter le point de vue suivant : chercher les grandeurs scalaires ou vectorielles qui ont un sens indépendant de la manière dont les paramètres ont été choisis.

Ces grandeurs auront une signification absolue : elles constitueront de ce fait des éléments géométriques de la surface.

Nous avons établi au n° 113 que moyennant des conditions d'analycité que nous supposerons remplies, on peut écrire

$$(106)\qquad \mathbf{MM'} = \Delta\lambda \frac{\partial M}{\partial \lambda} + \Delta\mu \frac{\partial M}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\left[\Delta\lambda^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} + 2\Delta\lambda\Delta\mu \frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu} + \Delta\mu^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}\right] + \dots,$$

en désignant par M le point provenant du système de valeurs λ, μ des paramètres, et M′ celui qui provient des valeurs $\lambda + \Delta\lambda$, $\mu + \Delta\mu$. Comme en analyse ordinaire, on peut considérer la différentielle

$$(107)\qquad dM = d\lambda \frac{\partial M}{\partial \lambda} + d\mu \frac{\partial M}{\partial \mu}.$$

Les vecteurs liés à M et dont la grandeur vectorielle est dM décrivent le plan tangent en M. Ce plan est celui des vecteurs $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$.

Dans la formule (106), la partie principale de **MM′** est précisément dM (lorsque $\Delta\lambda$ et $\Delta\mu$ sont infiniment petits). De même qu'en analyse, l'étude d'une fonction au voisinage immédiat d'un point se ramène à celle d'une fonction linéaire qui en est proche parente en ce point, sa différentielle totale, de même nous pouvons dire que la géométrie de la surface, dans le voisinage immédiat d'un point M, se confond avec celle de son plan tangent.

(1) Nous citerons plus loin un exemple qui semblerait aller à l'encontre de cette affirmation, mais en y regardant de près, nous verrons que le mode de représentation correspondant fait jouer un rôle spécial à un point arbitraire de la surface.

Tant qu'on n'introduit pas d'éléments métriques dans la question, cette manière de géométrie locale se développera par les processus linéaires, en rapportant le plan tangent en M aux deux vecteurs fondamentaux $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$. Soit **MV** un vecteur quelconque lié à M et situé dans le plan tangent. Nous l'exprimerons sous la forme

$$\mathbf{MV} = h\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k\frac{\partial M}{\partial \mu}. \tag{108}$$

Cherchons l'effet d'un changement de coordonnées défini par les formules (105). (Supposons, pour simplifier, leurs seconds membres analytiques.) Nous aurons

$$\begin{cases} d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \mu_1} d\mu_1, \\ d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_1} d\mu_1 \end{cases} \tag{109}$$

et d'autre part

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial M}{\partial \mu} d\mu = \frac{\partial M}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial M}{\partial \mu_1} d\mu_1. \tag{110}$$

La transformation linéaire subie par les vecteurs fondamentaux en M sera donc

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_1}\frac{\partial M}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda_1}\frac{\partial M}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial M}{\partial \mu_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu_1}\frac{\partial M}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_1}\frac{\partial M}{\partial \mu}. \end{cases} \tag{111}$$

Reportons-nous à ce que nous avons vu aux nos 78, 79. Nous voyons que les modes de variance de

$$d\lambda \quad \text{et} \quad d\mu$$

d'une part, de

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\partial M}{\partial \mu}$$

d'autre part, se contrarient, de manière à laisser inaltérée l'expression

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial M}{\partial \mu} d\mu.$$

Il y a également invariance de

$$h\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k\frac{\partial M}{\partial \mu}.$$

Donc h et k, qui sont les coordonnées contrevariantes du vecteur **MV** (d'après la définition des nos 78 et 79) ont le même mode de variance que $d\lambda$ et $d\mu$. Les formules de transformation de h et k, lors du changement de variable (105), sont donc

$$\begin{cases} h = \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_1} h_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \mu_1} k_1, \\ k = \frac{\partial \mu}{\partial \lambda_1} h_1 + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_1} k_1. \end{cases} \tag{112}$$

Dans tout ce que nous venons d'exposer, aucun élément métrique n'est intervenu. Pour achever l'étude des propriétés locales de la surface au point de vue linéaire, il resterait à indiquer la signification des groupes homogènes du second degré et des degrés supérieurs dans le développement (106). Bornons-nous à remarquer ce fait que les termes du second degré définissent par leur signe, confronté avec celui des termes du premier degré, la disposition de la surface par rapport à son plan tangent. On sait qu'il y a deux cas principaux suivant que la surface est *convexe* en M, ou *à courbures opposées en ce point.* Nous distinguerons aisément ces deux cas, en remarquant que dans l'un, la nappe de cône [1] définie par l'équation

$$(113) \qquad \mathbf{Mm} = \frac{1}{2}\left[\Delta\lambda^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial\lambda^2} + 2\Delta\lambda\,\Delta\mu \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \Delta\mu^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial\mu^2}\right]$$

coupera le plan tangent en M, alors que dans l'autre elle sera tout entière d'un même côté de ce plan. Si cette nappe de cône est tangente au plan tangent en M, on dit que M est un point parabolique : la considération des termes du second ordre ne suffit plus pour décider de la position de la surface par rapport à son plan tangent, dans le voisinage du point M.

Nous allons maintenant introduire le point de vue métrique : cela nous amènera à définir, pour toute surface, des formes différentielles invariantes vis-à-vis d'un déplacement imprimé à la surface aussi bien que d'un changement du mode de représentation paramétrique. Ces formes étant données, on peut chercher inversement s'il existe des surfaces qui les admettent. Ce problème sera le but final de nos recherches, qui tendront ainsi à la détermination du système le plus simple d'éléments différentiels dont la donnée détermine une surface à un déplacement près.

123. La forme métrique fondamentale. — Partons du développement (106)

$$\mathbf{MM}' = \Delta\lambda\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial\lambda} + \Delta\mu\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial\mu} + \frac{1}{2}\left[(\Delta\lambda)^2\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial\lambda^2} + 2\Delta\lambda\,\Delta\mu\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial\lambda\,\partial\mu} + (\Delta\mu)^2\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial\mu^2}\right] + \ldots,$$

et calculons le carré du vecteur MM′. A cause de la distributivité du produit scalaire et des caractères de convergence de la série entière du second membre, le carré de cette série se forme de la même façon qu'en analyse ordinaire. Nous aurons donc

$$(114) \quad \mathbf{MM}'^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial\lambda}\right)^2 \Delta\lambda^2 + 2\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial\mu}\Delta\lambda\,\Delta\mu + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial\mu}\right)^2 \Delta\mu^2 + \varphi\,(\Delta\lambda,\,\Delta\mu) + \ldots,$$

φ_3 représentant un groupe de termes homogène et du troisième degré en $\Delta\lambda$ et $\Delta\mu$, auquel succéderait un groupe analogue de degré quatre, et ainsi de suite :

Si aux quantités finies $\Delta\lambda$ et $\Delta\mu$, on substitue des infiniment petits $d\lambda$ et $d\mu$, la

(1) L'équation (113) ne définit qu'une nappe de cône, car si on y change $\Delta\lambda$ et $\Delta\mu$ en $t\,\Delta\lambda$ et $t\,\Delta\mu$, **Mm** devient t^2**Mm**. Le mode de paramétrage $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$ de cette nappe est impropre. Car si pour $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$, on obtient un point *m*, on obtient encore le même point pour les valeurs $-\Delta\lambda$, $-\Delta\mu$.

partie principale de $\mathbf{MM'^2}$, qui est aussi celle du carré de l'arc MM', sera constituée par le groupe de termes

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)^2 d\lambda^2 + 2\frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial M}{\partial \mu} d\lambda\, d\mu + \left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)^2 d\mu^2.$$

En appelant *ds* la différentielle de la longueur de l'arc infiniment petit MM', nous pouvons donc écrire

(115) $$ds^2 = \mathrm{E}d\lambda^2 + 2\mathrm{F}d\lambda\, d\mu + \mathrm{G}d\mu^2,$$

en posant

(116) $$\mathrm{E} = \left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)^2, \qquad \mathrm{F} = \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial M}{\partial \mu}, \qquad \mathrm{G} = \left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)^2.$$

Dans la formule (115), à cause de l'équivalence du carré d'un arc infiniment petit et de sa corde, on peut encore écrire dans le premier membre dM^2.

Le second membre est appelé l'ÉLÉMENT LINÉAIRE DE LA SURFACE. C'est encore la forme quadratique fondamentale (définie et positive), qui détermine, au point de vue local, la métrique de la surface. Considérons toujours un point M de celle-ci, et, en ce point, deux déplacements infiniment petits dM et δM. Le produit scalaire $dM.\delta M$ est la forme polaire de la forme quadratique fondamentale. Nous pourrons donc écrire

(117) $$dM.\delta M = \mathrm{E}d\lambda\delta\lambda + \mathrm{F}(d\mu\delta\lambda + d\lambda\delta\mu) + \mathrm{G}d\mu\delta\mu.$$

Appelons θ l'angle des deux vecteurs dM et δM, qui est encore l'angle de deux courbes se croisant en M sur la surface, et qui admettent les éléments linéaires dM et δM. Nous déduisons de la formule précédente

(118) $$ds\,\delta s\cos\theta = \mathrm{E}d\lambda\delta\lambda + \mathrm{F}(d\mu\delta\lambda + d\lambda\delta\mu) + \mathrm{G}d\mu\delta\mu,$$

relation qui permet de calculer l'angle θ, et, entre autres, de trouver la condition d'orthogonalité de deux directions, qui s'obtient en annulant le second membre.

En résumé, la forme quadratique

$$\mathrm{E}d\lambda^2 + 2\mathrm{F}d\lambda\, d\mu + \mathrm{G}d\mu^2$$

permet l'évaluation des divers éléments métriques, sur la surface, au voisinage immédiat d'un point. Dans une petite portion de la surface, les relations entre ces éléments, par exemple les relations entre les côtés et les angles d'un petit triangle sont sensiblement celles de la géométrie euclidienne ordinaire, et cela, à un degré d'approximation d'autant plus élevé qu'on opère dans une région de dimensions plus petites.

Nous rencontrons ici, pour la première fois, un exemple d'une géométrie localement euclidienne : il nous est fourni par la géométrie d'une surface [1], dans l'espace ordinaire. Ce point de vue sera d'ailleurs précisé par la suite.

(1) Au numéro précédent, nous avions rencontré pareillement, par la considération d'une surface de l'espace linéaire à trois dimensions, une géométrie à deux dimensions localement linéaire.

124. Coordonnées covariantes d'un vecteur tangent. — Reprenons le vecteur **MV** du plan tangent. Au lieu de le définir par ses coordonnées contrevariantes et de poser

$$\mathbf{MV} = h\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k\frac{\partial M}{\partial \mu}, \tag{119}$$

on peut le définir par ses coordonnées covariantes, c'est-à-dire par les deux produits scalaires

$$\sigma = \mathbf{MV}.\frac{\partial M}{\partial \lambda} \qquad \text{et} \qquad \tau = \mathbf{MV}.\frac{\partial M}{\partial \mu}. \tag{120}$$

Nous avons déjà justifié la dénomination de coordonnées covariantes données à ces expressions, en faisant voir qu'elles ont même loi de transformation que les deux vecteurs fondamentaux $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$. On peut répéter ici tous les calculs qui ont été faits au numéro 79, et en particulier ceux qui permettent de trouver les coordonnées covariantes en fonction des coordonnées contrevariantes. Multiplions scalairement les deux membres de (119) par $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$. En tenant compte des relations de définition (116) et (120), nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \sigma &= hE + kF, \\ \tau &= hF + kG. \end{aligned}\right. \tag{121}$$

Le carré de **MV** peut s'écrire indifféremment

$$\mathbf{MV}^2 = Eh^2 + 2Fhk + Gk^2,$$

ou

$$\mathbf{MV}^2 = \sigma h + \tau k. \tag{122}$$

En éliminant h et k entre les deux relations (121) et la relation (122), nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} E & F & \sigma \\ F & G & \tau \\ \sigma & \tau & \mathbf{MV}^2 \end{vmatrix},$$

qui conduit à une nouvelle expression de **MV**² :

$$\mathbf{MV}^2 = \frac{G\sigma^2 - 2F\sigma\tau + E\tau^2}{EG - F^2}; \tag{123}$$

le second membre est la forme quadratique adjointe de la forme fondamentale.

Supposons qu'on ait à étudier un ensemble de vecteurs, associés suivant une loi quelconque à chaque point d'une surface, ces vecteurs n'étant plus forcément dans le plan tangent. Soit **MW** le vecteur lié au point M, et soit ν le vecteur unité de la normale au point M [1]. Le vecteur **MW** est la somme géométrique de deux autres, l'un porté par la normale en M, l'autre situé dans le plan tangent en M. Soit **MV** ce dernier. Nous pourrons écrire

$$\mathbf{MW} = w\nu + \mathbf{MV},$$

(1) Même remarque qu'à la page 113.

en appelant $w\nu$ la grandeur géométrique de la composante normale de **MW**. Prenons pour système fondamental celui des trois vecteurs

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial M}{\partial \mu}, \quad \nu.$$

Les composantes contrevariantes de **MW** dans ce système seront immédiatement

$$h, \ k, \ w,$$

h et k étant déterminés comme précédemment, de manière que l'équation (119) soit vérifiée. Quant aux composantes covariantes de **MW**, ce seront

$$\sigma, \ \tau, \ w,$$

les nombres σ et τ ayant aussi la même signification que plus haut. Par le fait que le trièdre fondamental est birectangle, et que le vecteur ν a pour longueur l'unité, w joue à la fois le rôle de troisième composante contrevariante et de troisième composante covariante.

125. Surfaces admettant un élément linéaire donné. — Supposons toujours que l'on puisse légitimement déterminer un point de la surface par un développement de la forme

$$(124) \quad \mathbf{MM'} = \frac{\partial M}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial M}{\partial \mu}\Delta\mu + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}\Delta\lambda^2 + 2\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu}\Delta\lambda\,\Delta\mu + \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}\Delta\mu^2\right] + \dots.$$

Si la surface est astreinte à posséder, au voisinage de chaque point, un élément linéaire défini par la formule

$$ds^2 = Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda\,d\mu + Gd\mu^2,$$

les dérivées géométriques $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$ seront astreintes en tout point aux conditions

$$(125) \qquad \left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)^2 = E, \qquad \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial M}{\partial \mu} = F, \qquad \left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)^2 = G.$$

Par dérivation, nous déduirons de ces équations de nouvelles conditions imposées aux vecteurs

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2},$$

et, plus généralement, aux dérivées géométriques d'ordre supérieur.

Pour écrire effectivement le développement qui définit la surface autour d'un point particulier $M(\lambda, \mu)$, il faut calculer toutes ces dérivées géométriques en ce point. Choisissons en ce point les deux vecteurs fondamentaux $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$ de manière qu'ils satisfassent aux conditions (125), c'est-à-dire de manière que leurs longueurs soient respectivement $\sqrt{E}$ et $\sqrt{G}$, et que leur produit scalaire soit égal à F. Le système du point M et de ces deux vecteurs se trouve donc ainsi déterminé à un déplacement ou à une symétrie près.

Cherchons maintenant à déterminer, au même point M, les trois vecteurs

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}.$$

Dans ce but, dérivons les trois conditions (125) [qui doivent avoir lieu, non pas seulement au point M, mais quels que soient λ et μ], par rapport à λ et μ. Il nous vient

$$(126) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \lambda}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \mu}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} = \frac{\partial F}{\partial \mu}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \lambda}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \mu}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules nous fournissent deux sur trois des composantes covariantes des vecteurs cherchés, à savoir les composantes suivant les vecteurs fondamentaux $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$ tangents à la surface, mais non les composantes suivant la normale à la surface. Nous retiendrons ces formules sous la forme

$$(127) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \lambda}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \mu}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} = \frac{\partial F}{\partial \mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \lambda}, \end{aligned} \right. \qquad (127\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial M}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \mu}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \lambda}, \\ &\frac{\partial M}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \mu}. \end{aligned} \right.$$

En résumé, les termes du second degré, dans le développement (124), ne seront pas entièrement déterminés. Il nous manquera leurs troisièmes composantes :

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}, \quad \mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad \mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}.$$

Jusqu'à nouvel ordre, il nous est permis de les choisir d'une manière tout à fait arbitraire.

Pour déterminer les dérivées géométriques d'ordre trois, $\frac{\partial^3 M}{\partial \lambda^3}$, $\frac{\partial^3 M}{\partial \lambda^2 \partial \mu}$, $\frac{\partial^3 M}{\partial \lambda \partial \mu^2}$, $\frac{\partial^3 M}{\partial \mu^3}$, nous devrons dériver de nouveau les formules (126), ou, ce qui revient au même, appliquer aux formules (125) les opérations

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}.$$

Nous obtiendrons ainsi neuf équations indépendantes, liant la première et la seconde coordonnée de chaque vecteur inconnu, c'est-à-dire les huit quantités

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^3},\quad \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu},\quad \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2},\quad \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\mu^3},$$
$$\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^3},\quad \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu},\quad \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2},\quad \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\mu^3}.$$

La compatibilité de ce système exigera une condition s'exerçant entre les trois arbitraires

$$v\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2},\quad v\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu},\quad v\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}.$$

Supposons formée cette condition. Le calcul de la première et de la seconde coordonnée s'effectuera, pour chaque vecteur inconnu, d'une manière régulière, mais la troisième coordonnée demeurera arbitraire. Jusqu'à nouvel ordre, les quatre nombres

$$v\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^3},\quad v\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu},\quad v\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2},\quad v\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\mu^3}$$

pourront être choisis d'une manière absolument quelconque.

Si nous passons au calcul des dérivées du 4e ordre, l'application des opérations

$$\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3},\quad \frac{\partial^3}{\partial\lambda^2\partial\mu},\quad \frac{\partial^3}{\partial\lambda\partial\mu^2},\quad \frac{\partial^3}{\partial\mu^3}$$

aux formules du système (125) nous conduira à douze équations entre les dix inconnues que l'on obtient en prenant la première et la seconde composante de chaque vecteur. Nous aurons donc à exprimer deux conditions de compatibilité diminuant de deux degrés l'arbitraire des choix précédents, et pourrons grâce à ces conditions calculer régulièrement les dix inconnues en question. Mais nous pourrons encore choisir arbitrairement la troisième coordonnée de chaque vecteur cherché, sous la réserve que la part d'arbitraire impliquée par ce nouveau choix se trouvera de nouveau restreinte lors du calcul suivant. Et ainsi de suite; supposons que par des choix qui respectent la compatibilité des systèmes successifs, nous ayons déterminé toutes les dérivées géométriques $\frac{\partial^{i+k}M}{\partial\lambda_i\partial\mu_k}$ jusqu'à l'ordre n inclusivement. Rendus à ce point du calcul, nous pouvons choisir arbitrairement, semble-t-il, les nombres

$$v\cdot\frac{\partial^n M}{\partial\lambda^n},\quad v\cdot\frac{\partial^n M}{\partial\lambda^{n-1}\partial\mu},\ \ldots,\quad v\cdot\frac{\partial^n M}{\partial\mu^n}.$$

Pour obtenir les dérivées géométriques d'ordre $n+1$, ou mieux leurs composantes de rangs un et deux, nous appliquerons au système (125), équation par équation, les opérations

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n},\quad \frac{\partial^n}{\partial\lambda^{n-1}\partial\mu},\ \ldots,\quad \frac{\partial^n}{\partial\mu^n}.$$

Nous obtiendrons donc $3n+3$ équations, contenant deux fois plus d'inconnues qu'il y a de vecteurs à déterminer. Ces vecteurs sont au nombre de $n+2$. Donc, le

nombre des inconnues est $2n+4$. Nous aurons donc à exprimer $n-1$ conditions de compatibilité, qui réduiront de $n-1$ unités le degré d'arbitraire du choix précédent, lequel semblait porter *a priori* sur $n+1$ vecteurs. Donc, à chaque nouveau calcul de dérivées géométriques s'introduit une indétermination d'ordre deux. On démontre en outre, et nous l'admettrons, que lors de chaque choix, on peut soumettre les indéterminées à des conditions d'inégalité qui assurent la convergence du développement (124), lorsque $\Delta\lambda$ et $\Delta\mu$ sont suffisamment petits. Ce développement satisfait d'ailleurs aux conditions (125), puisque E, F, G étant eux-mêmes développables en série, les conditions exprimées par les dérivations successives équivalent à celles qui sont requises pour l'identité des premiers membres et des seconds.

Il existe donc une infinité de surfaces admettant un élément linéaire donné

$$ds^2 = \mathrm{E}d\lambda^2 + 2\mathrm{F}d\lambda\, d\mu + \mathrm{G}d\mu^2.$$

En exprimant l'élément linéaire sous cette forme, nous imposons par le fait même à la surface un mode de représentation paramétrique. Soient S et S′ deux surfaces admettant l'élément linéaire précédent. Soient M et M′ le point de S et le point de S′ provenant d'un même couple de valeurs λ, μ. Entre ces points existe une correspondance, douée nécessairement de la propriété suivante : si M décrit sur S un arc de courbe, M′ décrira sur S′ un arc de même longueur. Lorsqu'il existe entre deux surfaces une correspondance ponctuelle de cette nature, on dit que ces surfaces sont ISOMÉTRIQUES. On réserve la dénomination de SURFACES APPLICABLES à des surfaces S et S′ telles qu'on puisse passer de la première à la seconde par une suite continue de surfaces isométriques à S.

126. Propriétés géodésiques et propriétés métriques externes. — Si deux surfaces sont isométriques, non seulement il y a égalité entre les longueurs d'arcs correspondants, mais encore il y a conservation des angles [voir la formule (118)]. Plus généralement, toute relation entre les éléments métriques d'une de ces surfaces s'étend aux éléments correspondants de l'autre, pourvu que ces éléments soient empruntés exclusivement aux deux surfaces, et n'affectent nullement leurs relations avec l'espace extérieur. On réserve à ces éléments le nom d'ÉLÉMENTS GÉODÉSIQUES, et on appelle avec précision géométrie d'une surface l'étude des relations entre ses éléments géodésiques. Deux surfaces isométriques ont les mêmes éléments géodésiques. Elles ont donc la même géométrie.

Parmi les éléments géodésiques, il faut citer une catégorie de lignes particulièrement importantes, celles qui fournissent sur la surface le plus court chemin, sinon entre deux quelconques de leurs points, du moins entre deux de leurs points suffisamment rapprochés [1]. On donne à ces lignes le nom de LIGNES GÉODÉSIQUES.

(1) Il est facile de comprendre la raison d'être de cette restriction. Soit un cylindre de révolution. Les lignes géodésiques sont les hélices tracées sur ce cylindre. Prenons une de ces hélices H, soit A un point fixe sur cette courbe, B un point mobile. En utilisant le développement du cylindre sur un plan, il est facile de montrer que l'arc AB de H ne fournit effectivement le plus court chemin du point A au point B que si cet arc est moindre qu'une demi-spire (on pourra développer en fendant le cylindre suivant la génératrice de A et remarquer que le point B a une infinité d'images).

Analytiquement, les éléments géodésiques se reconnaissent au pouvoir d'être exprimés à l'aide des coefficients de l'élément linéaire, soumis à des opérations de nature différentielle, de nature intégrale, ou même de nature plus compliquée. Bornons-nous à faire remarquer que l'aire d'une portion de surface s'exprime par l'intégrale double

$$\int\int\sqrt{EG-F^2}\,d\lambda\,d\mu,$$

et qu'elle constitue un élément géodésique.

Aux propriétés géodésiques s'opposent les PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES EXTERNES, qui affectent les relations de l'espace extérieur avec la surface (1). Dans cette théorie, notre point de départ a consisté dans l'étude d'une propriété externe, lorsque nous avons évalué le carré de la distance rectiligne de deux points M et M' de la surface. En passant du fini à l'infiniment petit, nous sommes passés de cette propriété externe à une propriété géodésique. Les propriétés externes les plus importantes sont celles qui font intervenir la normale à la surface. Dans ce groupe, on peut faire entrer celles qui concernent les éléments de courbure et de torsion d'une courbe tracée sur la surface.

Nous verrons d'ailleurs, qu'à titre exceptionnel, certaines combinaisons de propriétés métriques externes peuvent prendre le caractère géodésique.

Nous avons posé, au début de cette section, la question de la recherche des conditions qui sont aptes à déterminer une surface à un déplacement ou à une symétrie près. Nous venons de voir que l'élément linéaire, pris isolément, ne suffit pas à une telle détermination. Pour compléter les données du problème, nous ferons appel aux propriétés métriques externes. Toutefois, le but sera ainsi dépassé et l'ensemble de nos conditions deviendra surabondant. Nous aurons à exprimer des conditions d'intégrabilité.

127. Définition de la forme métrique externe $\nu.d^2M$. — Quand nous nous sommes donné uniquement l'élément linéaire, il nous a manqué, pour le calcul des dérivées géométriques secondes, les trois quantités

$$(128)\qquad \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2},\qquad \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu},\qquad \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}.$$

Il est donc indiqué de considérer la forme quadratique

$$(129)\qquad \nu.d^2M=\nu.\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}d\lambda^2+2\nu.\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}d\lambda\,d\mu+\nu.\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}d\mu^2,$$

dont la donnée équivaut à celles des trois quantités précédentes.

Nous l'appellerons pour abréger la FORME MÉTRIQUE EXTERNE DE LA SURFACE.

Le but que nous poursuivons sera maintenant d'établir le théorème suivant :

(1) Dans la théorie des courbes gauches, on pourrait faire une distinction analogue, et étudier séparément la géométrie proprement dite de la courbe et ses propriétés métriques externes. La première est entièrement épuisée par la notion d'arcs égaux sur la courbe. La seconde comprend entre autres toutes les propriétés que nous avons exposées relativement aux éléments de courbure et de torsion.

Si l'on donne à la fois l'élément linéaire et la forme métrique externe, la surface est déterminée à un déplacement où à une symétrie près, pourvu qu'on suppose remplies trois conditions d'intégrabilité qui seront indiquées par la suite.

Nous sommes déjà certains qu'il faudra exprimer de telles conditions, puisque, nous venons de le voir, l'arbitraire qui semblait entier dans le choix des trois nombres (128) lorsqu'on s'en tenait au calcul des dérivées secondes, a vu son ordre s'abaisser d'une unité lorsque nous sommes passés au calcul des dérivées troisièmes. La condition de compatibilité qui diminue l'ordre de cette indétermination, et qui affecte les trois coefficients (128) de la forme externe, nous conduira à une combinaison d'éléments métriques externes qui prend manifestement le caractère géodésique.

Avant d'entamer la démonstration du théorème ci-dessus, nous ferons encore la remarque suivante. En vertu de l'orthogonalité de la normale et du plan tangent, nous avons

$$(130) \qquad \nu.\frac{\partial M}{\partial\lambda}=0, \qquad \nu.\frac{\partial M}{\partial\mu}=0,$$

ou plus simplement

$$\nu.dM=0.$$

Il en résulte évidemment

$$\nu.d^2M+d\nu.dM=0.$$

Donc la forme métrique externe peut encore s'écrire

$$-d\nu.dM.$$

Nous poserons pour abréger

$$(131) \qquad \nu.d^2M=E'd\lambda^2+2F'd\lambda\,d\mu+G'd\mu^2.$$

La remarque précédente nous permettra d'écrire

$$\left(\frac{\partial M}{\partial\lambda}d\lambda+\frac{\partial M}{\partial\mu}d\mu\right)\left(\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}d\lambda+\frac{\partial\nu}{\partial\mu}d\mu\right)=-(E'd\lambda^2+2F'd\lambda\,d\mu+G'd\mu^2);$$

nous en tirons les conséquences suivantes :

$$(132) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial M}{\partial\lambda}.\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}=-E',\\ &\frac{\partial M}{\partial\mu}.\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}+\frac{\partial M}{\partial\lambda}.\frac{\partial\nu}{\partial\mu}=-2F',\\ &\frac{\partial M}{\partial\mu}.\frac{\partial\nu}{\partial\mu}=-G'.\end{aligned}\right.$$

Dans la seconde de ces équations, les deux termes du premier membre sont égaux, car on a

$$\frac{\partial M}{\partial\mu}.\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\nu.\frac{\partial M}{\partial\mu}\right)-\nu.\frac{\partial^2M}{\partial\lambda\partial\mu}=-\nu.\frac{\partial^2M}{\partial\lambda\partial\mu},$$

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}.\frac{\partial\nu}{\partial\mu}=\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\nu.\frac{\partial M}{\partial\lambda}\right)-\nu.\frac{\partial^2M}{\partial\lambda\partial\mu}=-\nu.\frac{\partial^2M}{\partial\lambda\partial\mu}.$$

De l'égalité $\nu^2=1$, on déduit d'ailleurs $\nu.\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}=\nu.\frac{\partial\nu}{\partial\mu}=0$.

Donc les composantes covariantes du vecteur $\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}$ dans le système fondamental $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \mu}$, ν sont respectivement

$$-E', \quad -F', \quad 0.$$

Celles du vecteur $\frac{\partial \nu}{\partial \mu}$ dans le même système sont respectivement

$$-F', \quad -G', \quad 0.$$

L'étude de la dérivation géométrique du vecteur ν est liée intimement, d'après ce qui précède, à celle de la forme métrique externe. Aussi la développerons-nous un peu plus loin d'une manière systématique. Mais auparavant, nous donnerons d'abord la démonstration du théorème relatif à la détermination d'une surface, à une transformation métrique près, et sous conditions d'intégrabilité.

128. Les conditions d'intégrabilité. — Il faut trouver une surface lieu d'un point M, fonction des deux paramètres λ et μ, moyennant les conditions

$$(133) \qquad \left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)^2 = E, \qquad \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial M}{\partial \mu} = F, \qquad \left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)^2 = G,$$

$$(134) \qquad \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} = E', \qquad \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} = F', \qquad \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} = G'.$$

Nous supposons toujours qu'il soit légitime de raisonner en supposant la solution et les données analytiques. Nous épuiserons le contenu de nos équations en exprimant qu'elles sont vérifiées pour un couple particulier λ, μ, ainsi que celles qu'on en déduit par des dérivations quant à ces variables, en nombre quelconque. Donnons-nous encore le point $M(\lambda, \mu)$, les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$ du plan tangent en ce point en respectant les conditions (133). Les dérivées géométriques du second ordre au même point M seront alors entièrement déterminées par les formules (127) et (134). [On se rappelle que les formules (127) ont été obtenues par dérivation (quant à λ ou quant à μ) des formules (133).] Nous aurons

$$(\mathrm{I}) \left\{\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} &= \sigma, \\ \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} &= \sigma', \\ \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} &= \sigma'', \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{II}) \left\{\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} &= \tau, \\ \frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} &= \tau', \\ \frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} &= \tau'', \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{III}) \left\{\begin{aligned} \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} &= E', \\ \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} &= F', \\ \nu.\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} &= G'. \end{aligned}\right.$$

Il nous sera commode, pour la suite, d'écrire explicitement l'expression des trois dérivées géométriques secondes sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} &= h\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k\frac{\partial M}{\partial \mu} + l\nu, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} &= h'\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k'\frac{\partial M}{\partial \mu} + l'\nu, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} &= h''\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k''\frac{\partial M}{\partial \mu} + l''\nu. \end{aligned}\right.$$

en introduisant leurs composantes contrevariantes. Pour déterminer ces dernières, il suffit de multiplier scalairement les deux membres de chacune de ces relations par $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \mu}$, ν respectivement; en multipliant par ν, nous trouverons immédiatement, et conformément à une remarque déjà faite (n° 124),

$$l = E', \qquad l' = F', \qquad l'' = G'.$$

En multipliant par $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$, nous obtiendrons les trois groupes de relations

$$(\varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = hE + kF, \\ \tau = hF + kG, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma' = h'E + k'F, \\ \tau' = h'F + k'G, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma'' = h''E + k''F, \\ \tau'' = h''F + k''G; \end{array} \right.$$

donc si nous considérons que h, k, h', k', h'', k'' sont des expressions formées à l'aide des coefficients de l'élément linéaire et de leurs dérivées, et calculées par la résolution des trois systèmes ci-dessus où σ, σ', σ'', τ, τ', τ'' désignent, par abréviation, les seconds membres des formules (127), nous pourrons écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} = h \frac{\partial M}{\partial \lambda} + k \frac{\partial M}{\partial \mu} + E' \nu, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu} = h' \frac{\partial M}{\partial \lambda} + k' \frac{\partial M}{\partial \mu} + F' \nu, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} = h'' \frac{\partial M}{\partial \lambda} + k'' \frac{\partial M}{\partial \mu} + G' \nu. \end{array} \right.$$

Nous pouvons donc passer au calcul des dérivées troisièmes. Partons des trois systèmes (I), (II), (III), qui donnent les composantes covariantes, des rangs 1, 2, 3 des dérivées secondes. En dérivant par rapport à λ et μ chaque équation de l'un de ces systèmes, nous obtiendrons les composantes covariantes, de rang égal à celui du système, des dérivées troisièmes. Toutefois les systèmes (I) et (II) forment un système total équivalent à celui que l'on obtient en appliquant à chacune des équations (133) les opérations $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial}{\partial \mu}$. En appliquant ces mêmes opérations aux systèmes (I) et (II) on obtient douze équations, qui forment un système équivalent à celui que l'on obtiendrait en appliquant à chaque équation (133) les opérations

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}.$$

Ces douze équations se réduisent donc à neuf, qui contiennent seulement huit inconnues, à savoir les composantes covariantes de rang un et de rang deux des quatre dérivées géométriques troisièmes.

Rendons-nous compte effectivement de cette réduction en écrivant tout au long les équations que l'on déduit des systèmes (I) et (II) en appliquant à chacune de leurs équations les opérations $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial}{\partial \mu}$. Voici les équations obtenues :

$$
(\mathrm{I}')\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^3}+\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\right)^2=\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda},\\
&\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu}+\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}=\frac{\partial\sigma}{\partial\mu},\\
&\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu}+\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}=\frac{\partial\sigma'}{\partial\lambda},\\
&\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2}+\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\right)^2=\frac{\partial\sigma'}{\partial\mu},\\
&\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}=\frac{\partial\sigma''}{\partial\lambda},\\
&\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\mu^3}+\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}=\frac{\partial\sigma''}{\partial\mu}.
\end{aligned}\right.
\qquad
(\mathrm{II}')\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^3}+\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}=\frac{\partial\tau}{\partial\lambda},\\
&\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu}+\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}=\frac{\partial\tau}{\partial\mu},\\
&\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu}+\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\right)^2=\frac{\partial\tau'}{\partial\lambda},\\
&\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}=\frac{\partial\tau'}{\partial\mu},\\
&\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}=\frac{\partial\tau''}{\partial\lambda},\\
&\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\mu^3}+\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\right)^2=\frac{\partial\tau''}{\partial\mu}.
\end{aligned}\right.
$$

Dans le système (I′), la seconde et la troisième équation ne sont pas différentes l'une de l'autre : leur premier membre est le même, leurs seconds membres sont égaux, en vertu des relations

$$\sigma=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\lambda},\qquad \sigma'=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\mu}$$

[voir les formules (127)]. Dans le système (II′) un fait analogue se produit pour la quatrième et la cinquième équation, en vertu des relations

$$\tau'=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda},\qquad \tau''=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\mu}.$$

Considérons maintenant les équations de rangs 4 et 5 dans le système (I′), et celles de rangs 2 et 3 dans le système (II′), lesquelles contiennent seulement deux inconnues

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu}.$$

Ces quatre équations n'en font en réalité que trois. En effet, en retranchant membre à membre les équations de rangs 4 et 5 dans le système (I′), nous obtiendrons la relation

$$(135)\qquad \frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}-\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\right)^2=\frac{\partial\sigma''}{\partial\lambda}-\frac{\partial\sigma'}{\partial\mu}.$$

En retranchant de même les équations de rangs 2 et 3 du système (II′), nous obtiendrons

$$(136)\qquad \frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}-\left(\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\right)^2=\frac{\partial\tau}{\partial\mu}-\frac{\partial\tau'}{\partial\lambda}.$$

Or, en se reportant aux relations (127) on constate encore l'identité des seconds membres, car elle se ramène à la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\sigma''+\tau')=\frac{\partial}{\partial\mu}(\sigma'+\tau);$$

or, on a

$$\sigma''+\tau'=\frac{\partial F}{\partial\mu},\qquad \sigma'+\tau=\frac{\partial F}{\partial\lambda}.$$

En même temps que ce raisonnement nous montre comment s'effectue la réduction du système [(I′), (II′)] à celle d'un système de neuf équations indépendantes, il nous montre que la condition de compatibilité de ces neuf équations à huit inconnues peut s'écrire indifféremment sous l'une des formes (135) ou (136).

Écrivons maintenant le système (III′), déduit du système (III) en dérivant chacune de ses équations par rapport à λ et μ. Nous aurons

$$
(\text{III}')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\nu\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^3}+\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}=\frac{\partial E'}{\partial\lambda},\\
&\nu\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu}+\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}=\frac{\partial E'}{\partial\mu},\\
&\nu\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda^2\partial\mu}+\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}=\frac{\partial F'}{\partial\lambda},\\
&\nu\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2}+\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}=\frac{\partial F'}{\partial\mu},\\
&\nu\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2}+\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}=\frac{\partial G'}{\partial\lambda},\\
&\nu\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\mu^3}+\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}=\frac{\partial G'}{\partial\mu}.
\end{aligned}\right.
$$

Ce système renferme quatre inconnues seulement; il y a donc deux conditions de compatibilité qui s'écrivent immédiatement

$$
(137)\qquad \frac{\partial\nu}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}=\frac{\partial E'}{\partial\mu}-\frac{\partial F'}{\partial\lambda};
$$

$$
(138)\qquad \frac{\partial\nu}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}-\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}=\frac{\partial F'}{\partial\mu}-\frac{\partial G'}{\partial\lambda}.
$$

En définitive, il y a donc trois conditions de compatibilité à satisfaire en vue du calcul des dérivées géométriques troisièmes. Elles nous sont données par les formules

(135) ou (136), (137), (138).

Non seulement ces conditions devront être satisfaites localement, c'est-à-dire pour le couple particulier de valeurs λ, μ, considéré précédemment, mais, d'une manière générale, elles devront l'être pour tous les couples λ, μ qui appartiennent au domaine d'analycité des fonctions E, F, G, E′, F′, G′. *Les trois conditions précédentes sont donc nécessaires* à l'existence de solutions du système [(133), (134)]. *Ces conditions sont aussi suffisantes*, car elles entraînent, pour le couple particulier λ, μ, les conditions assurant la compatibilité dans le calcul local des dérivées successives. Par exemple, prenons la condition (135). Elle exprime la compatibilité des équations de rangs 4 et 5 du système (I′). Si elle est vérifiée pour toutes les valeurs des variables indépendantes, ces deux équations seront compatibles quels que soient λ et μ. Donc, en appelant pour abréger ω la valeur $\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^3 M}{\partial\lambda\partial\mu^2}$ soumise à ces deux équations, et en

les mettant sous la forme

$$\omega + \varphi = 0 \quad \text{avec} \quad \varphi = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\right)^2 - \frac{\partial\sigma'}{\partial\mu},$$

$$\omega + \psi = 0 \quad \text{avec} \quad \psi = \frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2} - \frac{\partial\sigma''}{\partial\lambda},$$

nous pourrons affirmer ceci : λ, μ représentant le couple particulier considéré, et $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$ un système d'accroissements quelconques, la compatibilité des équations

$$\omega(\lambda, \mu) + \varphi(\lambda, \mu) + \Delta\lambda\frac{\partial(\omega+\varphi)}{\partial\lambda} + \Delta\mu\frac{\partial(\omega+\varphi)}{\partial\mu} + \ldots = 0,$$

$$\omega(\lambda, \mu) + \psi(\lambda, \mu) + \Delta\lambda\frac{\partial(\omega+\psi)}{\partial\lambda} + \Delta\mu\frac{\partial(\omega+\psi)}{\partial\mu} + \ldots = 0$$

s'exprime par la condition

$$\varphi(\lambda, \mu) - \psi(\lambda, \mu) + \Delta\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi-\psi) + \Delta\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(\varphi-\psi) + \ldots,$$

quels que soient $\Delta\lambda$ et $\Delta\mu$. Donc tous les termes de ce dernier développement sont nuls. La condition $\varphi = \psi$ pour le système particulier λ, μ exprime la compatibilité locale pour le calcul de ω. Viennent ensuite les conditions

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi-\psi) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial\mu}(\varphi-\psi) = 0,$$

qui expriment la compatibilité locale dans le calcul de $\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}$ et de $\frac{\partial\omega}{\partial\mu}$, calcul auquel on ramène celui de $\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^4 M}{\partial\lambda^2\partial\mu^2}$ et de $\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^4 M}{\partial\lambda\partial\mu^3}$, les seules dérivées qui se présenteront à la fois dans deux équations distinctes du système (I″) déduit de (I′) par les opérations $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial}{\partial\mu}$. On retrouverait les mêmes conditions en partant du système (II″), où les seules inconnues intervenant à la fois dans deux équations distinctes sont

$$\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^4 M}{\partial\lambda^3\partial\mu} \quad \text{et} \quad \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^4 M}{\partial\lambda^2\partial\mu^2}.$$

L'identité des conditions ainsi déduites de (I″) et (II″) est une conséquence de l'identité des résultats obtenus en soustrayant, dans (I′) les équations de rangs 4 et 5, dans (II′) celles de rangs 3 et 2.

En appliquant indéfiniment ce raisonnement, nous établirons que la condition générale (135) assure la compatibilité locale de tous les systèmes obtenus par dérivation à partir de (I′) et de (II′). Un raisonnement analogue s'applique aux conditions (137) et (138) et aux systèmes obtenus par dérivation à partir du système (III′).

Sous la réserve qu'il resterait à élucider la question de convergence, nous pouvons donc affirmer que nos trois conditions (135), (137), (138) sont nécessaires et suffisantes.

129. Transformation des conditions d'intégrabilité. — Écrivons à nouveau ces trois conditions, en y remplaçant les trois dérivées géométriques secondes par

leurs expressions explicites, et en remplaçant les coordonnées covariantes, précédemment calculées, de $\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}$ et de $\frac{\partial \nu}{\partial \mu}$ par leurs valeurs. Nous obtenons d'abord, à partir de la formule (135),

$$\left(h\frac{\partial M}{\partial \lambda}+k\frac{\partial M}{\partial \mu}+E'\nu\right)\cdot\left(h''\frac{\partial M}{\partial \lambda}+k''\frac{\partial M}{\partial \mu}+G'\nu\right)-\left(h'\frac{\partial M}{\partial \lambda}+k'\frac{\partial M}{\partial \mu}+F'\nu\right)^2$$
$$=\frac{\partial \sigma''}{\partial \lambda}-\frac{\partial \sigma'}{\partial \mu}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \mu}+\frac{\partial^2 E}{\partial \mu^2}\right),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(139)\qquad E(hh''-h'^2)+F(hk''+kh''-2h'k')+G(kk''-k'^2)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \mu}+\frac{\partial^2 E}{\partial \mu^2}\right)+E'G'-F'^2=0,$$

formule qui montre que $E'G'-F'^2$ est susceptible de s'exprimer uniquement par les coefficients de l'élément linéaire et de leurs dérivées. Ce résultat capital, dû à Gauss, sera interprété par la suite.

Appliquons la même méthode de calcul aux équations (137) et (138). Il vient

$$\frac{\partial \nu}{\partial \mu}\cdot\left(h\frac{\partial M}{\partial \lambda}+k\frac{\partial M}{\partial \mu}+E'\nu\right)-\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}\cdot\left(h'\frac{\partial M}{\partial \lambda}+k'\frac{\partial M}{\partial \mu}+F'\nu\right)=\frac{\partial E'}{\partial \mu}-\frac{\partial F'}{\partial \lambda},$$
$$\frac{\partial \nu}{\partial \mu}\cdot\left(h'\frac{\partial M}{\partial \lambda}+k'\frac{\partial M}{\partial \mu}+F'\nu\right)-\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}\cdot\left(h''\frac{\partial M}{\partial \lambda}+k''\frac{\partial M}{\partial \mu}+F''\nu\right)=\frac{\partial F'}{\partial \mu}-\frac{\partial G'}{\partial \lambda}.$$

C'est maintenant le moment d'utiliser les composantes covariantes des dérivées géométriques de ν. Il vient

$$(140)\qquad h'E'+k'F'-(hF'+kG')=\frac{\partial E'}{\partial \mu}-\frac{\partial F'}{\partial \lambda},$$

$$(141)\qquad h''E'+k''F'-(h'F'+k'G')=\frac{\partial F'}{\partial \mu}-\frac{\partial G'}{\partial \lambda}.$$

Les formules (139), (140), (141), où les h et k se calculent comme nous l'avons indiqué constituent l'expression définitive des conditions d'intégrabilité.

Si ces conditions sont remplies, ayant choisi le point M qui correspond au couple particulier λ, μ ainsi que les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$ correspondants, nous pourrons calculer, et d'une seule manière, les composantes de toutes ses dérivées géométriques, dans le système fondamental $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \mu}$, ν. La surface sera donc connue à une transformation métrique près. Le théorème annoncé est établi.

Il nous reste à étudier les propriétés métriques externes qui se rattachent à la considération de la forme $-d\nu.dM$: l'étude de cette dernière nous révèlera d'abord qu'entre chaque vecteur infiniment petit dM du plan tangent, et le vecteur $d\nu$ correspondant, qui est parallèle à ce plan en vertu de

$$\nu.d\nu=0,$$

il existe une correspondance qui est non seulement linéaire mais autométrique; nous serons donc ainsi conduits à définir en chaque point de la surface deux directions principales, invariantes par cette transformation. Puis, nous compléterons ces résultats en calculant la dérivée géométrique du vecteur ν, par rapport à l'arc d'une courbe quelconque de la surface.

130. La correspondance entre dM et $d\nu$. Représentation sphérique. — Nous allons faire appel aux définitions qui ont été posées au numéro 82. Soient d et δ les caractéristiques qui symbolisent sur la surface deux déplacements infiniment petits. Je dis que l'on a [1]

$$(142) \qquad d\text{M} \,.\, \delta\nu = d\nu \,.\, \delta\text{M}.$$

En effet, exprimons les coordonnées d'un point M de la surface en fonction des deux paramètres λ et μ. Nous avons à multiplier scalairement

$$d\text{M} = \frac{\partial \text{M}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \text{M}}{\partial \mu} d\mu,$$

$$\delta\nu = \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \delta\lambda + \frac{\partial \nu}{\partial \mu} \delta\mu.$$

Le coefficient de $d\lambda\,\delta\mu$ est $\frac{\partial \text{M}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \mu}$ et celui de $d\mu\,\delta\lambda$ est $\frac{\partial \text{M}}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}$. Nous avons vu (n° 127) que ces coefficients sont égaux, et que leur valeur commune est $-\nu \,.\, \frac{\partial^2 \text{M}}{\partial \lambda \partial \mu}$. Donc la forme bilinéaire $d\text{M} \,.\, \delta\nu$ est une fonction symétrique de dM et δM. Donc, *non seulement* $\delta\nu$ *correspond à* δM *par une transformation linéaire, mais encore cette transformation est autométrique*. La valeur commune des deux membres de (142) est la forme polaire de la forme quadratique

$$d\text{M} \,.\, d\nu,$$

c'est-à-dire de la forme métrique externe changée de signe. En résumé, la correspondance entre dM et $d\nu$ se trouve définie par la formule

$$-d\text{M} \,.\, \delta\nu = \text{E}' d\lambda\,\delta\lambda + \text{F}'(d\lambda\,\delta\mu + d\mu\,\delta\lambda) + \text{G}' d\mu\,\delta\mu.$$

Pour obtenir les directions principales, nous écrirons que la forme quadratique [2]

$$d\text{M} \,.\, d\nu + \text{S}\,d\text{M}^2 = -(\nu \,.\, d^2\text{M} - \text{S}\,d\text{M}^2)$$

est réductible à un seul carré. Elle est égale au signe près à

$$(\text{E}' - \text{ES})\,d\lambda^2 + 2(\text{F}' - \text{FS})\,d\lambda\,d\mu + (\text{G}' - \text{GS})\,d\mu^2.$$

Les directions principales s'obtiendront en éliminant S entre les deux équations

$$(143) \qquad \begin{cases} (\text{E}' - \text{ES})\,d\lambda + (\text{F}' - \text{FS})\,d\mu = 0, \\ (\text{F}' - \text{FS})\,d\lambda + (\text{G}' - \text{GS})\,d\mu = 0. \end{cases}$$

(1) On pourrait remarquer simplement qu'en vertu de $\nu . d\text{M} = 0$, on a $\delta(\nu . d\text{M}) = 0$. On en tire immédiatement $\delta\nu . d\text{M} = -\nu\,\delta d\text{M}$. (C. Q. F. D.)

(2) Le lecteur remarquera qu'à la quantité s, considérée dans la théorie des transformations autométriques, nous substituons ici la quantité $\text{S} = -s$.

Elles sont donc définies par l'équation

$$(144) \qquad \begin{vmatrix} E'd\lambda + F'd\mu, & Ed\lambda + Fd\mu \\ F'd\lambda + G'd\mu, & Fd\lambda + Gd\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Nous donnerons dans un instant l'interprétation de la racine S qui correspond à une direction principale déterminée. Dans ce but, nous entreprendrons le calcul de la dérivée géométrique $\frac{d\nu}{ds}$, par rapport à l'arc d'une courbe quelconque de la surface.

Mais auparavant remarquons que ce calcul est intimement lié à une notion importante, celle de la *représentation sphérique* de la surface : en effet, prenons un point fixe arbitraire O, et à chaque point M de la surface S faisons correspondre le point m tel que

$$\mathbf{Om} = \nu,$$

ν représentant toujours le vecteur unité de la normale en M à S. Le point m est situé sur une sphère de rayon un. Nous définissons entre la surface S et cette sphère une correspondance par plans tangents parallèles : on dit que m est l'image sphérique de M. Si M subit un déplacement dM, son image sphérique subit un déplacement $dm = d\nu$, qui acquiert la même direction que dM si la direction de ce dernier vecteur est elle-même principale.

En égalant à zéro le produit scalaire $dM.d\nu$, c'est-à-dire en annulant la forme métrique externe, on obtiendra une équation

$$(145) \qquad E'd\lambda^2 + 2F'd\lambda d\mu + G'd\mu^2 = 0,$$

qui définit en direction les déplacements dM orthogonaux à leurs correspondants dm sur la représentation sphérique. Tous ces résultats vont être précisés lorsque nous connaîtrons la valeur de $\frac{d\nu}{ds}$.

131. Calcul de la dérivée géométrique du vecteur ν. — Soit une surface S, une courbe C tracée sur cette surface. Menons la tangente MT en un point M de cette courbe, dans le sens des arcs croissants, préalablement fixé. Nous considérerons, comme aux nos 115 et suivants, les trois vecteurs fondamentaux **T**, **N**, **B** attachés à cette courbe. Le plan normal en M à C contient à la fois **N**, **B**, ν, il coupe le plan tangent suivant une normale particulière, dite *normale géodésique*. Soit Γ le vecteur unité de la normale géodésique (1), tel que le trièdre **T**, Γ, ν soit direct. Dans le plan normal, le sens des rotations positives est défini par un observateur ayant les pieds en M et la tête en T. Définissons la position du vecteur ν dans le plan normal en donnant

$$(\mathbf{N}, \nu) = \theta.$$

Nous aurons manifestement

$$(145) \qquad \nu = \mathbf{N}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta,$$

$$(146) \qquad \Gamma = \mathbf{N}\sin\theta - \mathbf{B}\cos\theta.$$

Il nous suffira maintenant, pour obtenir le résultat cherché, de dériver la for-

(1) Pour sa commodité, le lecteur surmontera d'une flèche les lettres ν et Γ qui désignent des vecteurs.

mule (145) par rapport à s. Mais auparavant, pour donner un sens précis au calcul que nous allons entreprendre, il importe de démontrer le résultat suivant, utilisé déjà par M. de Tannenberg [1] :

La dérivée géométrique $\frac{d\nu}{ds}$ *a la même valeur pour toutes les courbes de* S *tangentes en* M *à une même droite* MT *du plan tangent.*

Ce résultat n'est vrai que moyennant certaines hypothèses. L'analycité, que nous avons supposée jusqu'ici, peut être remplacée par une condition moins restrictive : il suffit de supposer qu'on peut paramétrer la surface de manière que $\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\,\partial\mu}, \frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}$ existent et soient continues. En effet, dans cette hypothèse, pour calculer $\frac{d\nu}{ds}$, on pourra remarquer que ν est une fonction composée de s par l'intermédiaire de λ et de μ. Donc, on peut calculer $\frac{d\nu}{ds}$ en appliquant la formule

$$\frac{d\nu}{ds} = \frac{\partial\nu}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{ds} + \frac{\partial\nu}{\partial\mu}\frac{d\mu}{ds},$$

pourvu que les dérivées $\frac{\partial\nu}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial\nu}{\partial\mu}$ existent et soient continues. Or il en est bien ainsi en vertu de notre hypothèse. [La proposition que nous appliquons ici relativement à la dérivation d'un vecteur, qui se présente comme fonction composée, ne nécessite d'ailleurs pas de démonstration spéciale et synthétise les résultats d'application du théorème correspondant d'analyse aux trois composantes de ce vecteur (dans un système fondamental d'ailleurs quelconque).] Il suffit alors de remarquer qu'en vertu de la formule

$$ds = \sqrt{\mathrm{E}\,d\lambda^2 + 2\mathrm{F}\,d\lambda\,d\mu + \mathrm{G}\,d\mu^2},$$

les expressions $\frac{d\lambda}{ds}$ et $\frac{d\mu}{ds}$ ne dépendent que du rapport $\frac{d\mu}{d\lambda}$. Elles sont donc entièrement déterminées par la direction de MT. (C. Q. F. D.)

Cela posé, la dérivation de la formule (145) nous donne

$$\frac{d\nu}{ds} = \frac{d\mathbf{N}}{ds}\cos\theta + \frac{d\mathbf{B}}{ds}\sin\theta + (-\mathbf{N}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta)\frac{d\theta}{ds}.$$

Le coefficient de $\frac{d\theta}{ds}$ n'est autre que $(-\Gamma)$, d'après (146). Appliquons maintenant les formules de Frenet. Il vient

$$\frac{d\nu}{ds} = (-\mathbf{N}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta)\left(\frac{d\theta}{ds} - \tau\right) - \mathbf{T}\rho\cos\theta,$$

en continuant à appeler ρ la courbure et τ la torsion. Nous pouvons donc écrire finalement

$$\frac{d\nu}{ds} = -\mathbf{T}\rho\cos\theta + \Gamma\left(\tau - \frac{d\theta}{ds}\right). \qquad (147)$$

(1) *Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différentiel.*

Du lemme précédent nous déduisons immédiatement ce résultat remarquable :

Pour toutes les courbes de la surface tangentes en M *à* MT, *chacune des deux quantités*

$$\rho \cos\theta \qquad et \qquad \tau - \frac{d\theta}{ds},$$

possède une même valeur.

Chacune d'elles a illustré un géomètre : à la première est attaché le nom de Meusnier, et à la seconde celui d'Ossian Bonnet. Nous allons les étudier à tour de rôle.

132. Le théorème de Meusnier et la courbure des sections normales. — Pour toutes les courbes de la surface tangentes en M à MT la quantité $\rho\cos\theta$ a même valeur. Si, en outre, θ est le même, c'est-à-dire si les plans osculateurs coïncident, ρ sera le même, les courbes auront même courbure au point considéré. Cette remarque permet de substituer à la détermination de la courbure en M d'une courbe C de S, celle de la courbure en M de la section de S par le plan osculateur à C en M. L'étude de la courbure sera donc limitée désormais aux sections planes de la surface.

Mais il y a plus. Désignons par ρ_0 la valeur de $\rho\cos\theta$ pour la tangente MT :

$$\rho \cos\theta = \rho_0.$$

Appelons K le centre de courbure de C en M, c'est-à-dire le point tel que

$$\mathbf{MK} = \frac{1}{\rho}\mathbf{N},$$

et soit K_0 le point de la normale en M à la surface tel que l'on ait

$$\mathbf{MK_0} = \frac{\nu}{\rho_0}.$$

Entre les deux longueurs MK et MK_0 existe la relation

$$MK_0 \cos\theta = MK,$$

θ étant l'angle KMK_0. Il en résulte le théorème de Meusnier :

Les centres de courbure en M *de toutes les courbes de la surface tangentes en ce point à la droite* MT *sont répartis dans le plan normal correspondant, sur la circonférence de diamètre* MK_0.

Le point K_0 sera donc lui-même centre de courbure pour certaines lignes de la surface tangentes en M à MT, à savoir celles dont le plan osculateur en M contient la normale à la surface. Par exemple K_0 sera le centre de courbure de la section normale passant par MT.

Nous sommes donc ramenés, en fin de compte, à étudier suivant quelle loi varie la courbure d'une section normale, lorsque le plan de cette section tourne autour de la normale en M. Nous aurons toujours, dans ce cas, l'une des relations

$$\mathbf{N} = \nu \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{N} = -\nu,$$

et par suite

$$\cos\theta = \pm 1 = \varepsilon.$$

Pour calculer la valeur de $\rho\cos\theta$, multiplions scalairement les deux membres de l'équation (147) par le vecteur $\frac{dM}{ds}$. Nous aurons, en remarquant que ce vecteur n'est autre que **T**,

$$\frac{d\nu . dM}{ds^2} = -\rho\cos\theta = -\rho_0,$$

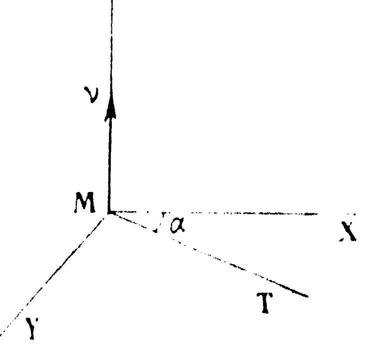
d'où

$$\rho_0 = \frac{E'd\lambda^2 + 2F'd\lambda d\mu + G'd\mu^2}{Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda d\mu + Gd\mu^2}.$$

ρ_0 n'est autre chose que le rapport $\frac{\nu}{\mathbf{MK}_0}$. Nous avons donc finalement la formule

$$(148)\qquad \frac{\nu}{\mathbf{MK}_0} = \frac{E'd\lambda^2 + 2F'd\lambda d\mu + G'd\mu^2}{Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda d\mu + Gd\mu^2}.$$

Désignons par MX et MY les tangentes principales en M, par A_0 et B_0 les positions correspondantes de K_0, qu'on nomme centres de courbure principaux. Soit MT une demi-droite quelconque, telle que



$$(\widehat{MX, MT}) = \alpha.$$

Appelons avec précision K_0 le centre de courbure qui correspond à cette section normale. Dans la transformation autométrique qui permet de passer de dM à $d\nu$, les directions principales sont MX et MY. Donc pour ces directions, le coefficient de Γ dans la formule (147) est égal à zéro, et cette formule peut encore s'écrire

$$d\nu = -\rho_0 dM,$$

ce qui montre que le coefficient dont est douée chacune de ces directions principales est le nombre opposé de la quantité ρ_0 correspondante, c'est-à-dire la quantité $-\frac{\nu}{\mathbf{MA}_0}$ pour MX, et la quantité $-\frac{\nu}{\mathbf{MB}_0}$ pour MY. Si nous exprimons que la forme

$$dM . d\nu + S dM^2,$$

est réductible à un seul carré, nous savons d'autre part que nous pouvons déduire les directions principales de l'équation

$$(149)\qquad \begin{vmatrix} E' - ES & F' - FS \\ F' - FS & G' - GS \end{vmatrix} = 0.$$

A chaque racine S correspond une direction principale, douée ici du coefficient $-S$ (voir nos 89, 90). En comparant ces deux résultats, nous pouvons énoncer le suivant :

L'équation (149) *admet comme racines les courbures principales au point* M.

Cherchons maintenant à exprimer

$$\frac{\nu}{\mathbf{MA}_0} = \frac{1}{R},$$

en fonction des courbures principales

$$\frac{\nu}{\mathbf{MA}_0} = \frac{1}{R_1}, \qquad \frac{\nu}{\mathbf{MB}_0} = \frac{1}{R_2},$$

et de l'angle α.

Cette expression s'obtient immédiatement en remarquant que (148) nous donne $\frac{1}{R}$ comme quotient de deux formes quadratiques du vecteur dM, ou, ce qui revient au même à cause de l'homogénéité de degré zéro, du quotient des deux mêmes formes du vecteur unité **T** de MT. L'une de ces formes, dans le système fondamental **X**, **Y**, des vecteurs unités de MX et MY, a pour expression

$$Q(\mathbf{T}) = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2},$$

puisque les composantes de **T** dans ce système sont $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, et qu'une forme exprimée dans un système fondamental, orthogonal et normal, de directions principales, se réduit à des termes carrés par rapport aux composantes, dont les coefficients sont précisément les racines de l'équation en S. En dénominateur, nous aurions à écrire le carré $Q(\mathbf{T})$ de la longueur du vecteur **T**. Par hypothèse, il se réduit à l'unité. Nous pouvons donc écrire

$$(150) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}.$$

Cette formule donne la loi de variation de la courbure des sections normales [1].

Soient R et R′ les valeurs algébriques des rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires. De la formule (150), on déduit aisément

$$(151) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

L'expression $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$, somme des courbures de deux sections normales rectangulaires quelconques, est donc constante au point M. On lui a donné le nom de *courbure moyenne*.

133. Tangentes et lignes asymptotiques. — On appelle tangentes asymptotiques en chaque point celles dont les directions annulent le produit scalaire

$$dM . d\nu.$$

(1) A cette loi se rattache la notion de l'indicatrice d'Euler, dont la forme est liée à la situation relative de la surface et de son plan tangent en M. Nous renverrons le lecteur, pour cette question, à notre *Cours de Géométrie analytique* (pages 346 et suivantes).

et lignes asymptotiques les lignes admettant en chacun de leurs points une tangente asymptotique. L'équation différentielle de ces lignes est donc

$$(152) \qquad E' d\lambda^2 + 2F' d\lambda\, d\mu + G' d\mu^2 = 0.$$

Nous avons établi d'ailleurs que l'on a

$$- d\nu . dM = \rho \cos\theta\, ds^2.$$

Donc, pour ces lignes, $\cos\theta$ est nul : *le plan osculateur se confond avec le plan tangent à la surface*, et réciproquement. Un déplacement infinitésimal sur une asymptotique est orthogonal à sa représentation sphérique.

Les lignes asymptotiques ne sont réelles que si la quantité $E'G' - F'^2$ est négative. Il est facile de donner maintenant l'interprétation de cette quantité, dont nous avons montré précédemment le caractère géodésique. Nous venons de voir que l'équation qui admet pour racines $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ peut s'écrire

$$\left(E' - \frac{E}{R}\right)\left(G' - \frac{G}{R}\right) - \left(F' - \frac{F}{R}\right)^2 = 0,$$

nous avons donc

$$(153) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2};$$

$EG - F^2$ est essentiellement positif, puisqu'il est le discriminant de l'élément linéaire. Donc le signe de $E'G' - F'^2$ est le signe de $\frac{1}{R_1 R_2}$.

Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Pour qu'en un point d'une surface, il passe deux asymptotiques réelles, il faut et il suffit qu'en ce point les deux courbures principales soient de signes contraires.

Nous ne développerons pas davantage la théorie des lignes asymptotiques, qui n'atteint son plein épanouissement que dans la géométrie projective et dualistique.

134. La courbure totale. — La quantité $E'G' - F'^2$, formée à l'aide d'invariants métriques externes, se ramène en définitive à une expression géodésique. L'équation (153) nous donne, dans l'espace où la surface est plongée, une interprétation simple de la signification du rapport

$$\frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2}.$$

Ce rapport est le produit des courbures principales au point M. On l'appelle la *courbure totale* de la surface en ce point. La considération de la transformation autométrique qui change dM en $d\nu$ montre immédiatement que la courbure totale est la limite du rapport de la représentation sphérique d'une aire infiniment petite de la surface à cette aire. En outre, la nature géodésique du second membre de (152) nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Si deux surfaces sont isométriques, elles ont la même courbure totale en des points correspondants.

Ce théorème est dû à Gauss. Nous allons maintenant passer à l'étude de la quantité

$$\tau - \frac{d\theta}{ds},$$

qui partage avec $\rho \cos\theta$ la propriété d'avoir une valeur commune pour toutes les courbes de la surface tangentes en M à MT.

135. Le théorème d'Ossian Bonnet. — Pour déterminer cette valeur, re e-nons l'égalité vectorielle (147) et faisons le produit scalaire de ses deux membres par Γ. Il nous vient

$$\Gamma . \frac{d\nu}{ds} = \tau - \frac{d\theta}{ds}.$$

Considérons dans le plan tangent deux vecteurs rectangulaires issus du point M :

1° le vecteur $d\mathrm{M}$ colinéaire à $\mathbf{T}$ et tel que $d\mathrm{M} = \mathbf{T}\,ds$;

2° le vecteur $\delta\mathrm{M}$, de même longueur et tel que $\delta\mathrm{M} = \Gamma\,ds$. Ce vecteur est donc colinéaire à Γ.

La formule précédente peut encore s'écrire, à l'aide de ces vecteurs,

$$\delta\mathrm{M} . d\nu = \left(\tau - \frac{d\theta}{ds}\right) ds^2.$$

Remarquons alors que $d\nu$ et $\delta\mathrm{M}$ se déduisent de $d\mathrm{M}$ par une transformation linéaire, propre à chacun d'eux. Donc le premier membre est une forme quadratique du vecteur $d\mathrm{M}$. Nous pouvons donc exprimer

$$\tau - \frac{d\theta}{ds},$$

par le quotient de deux formes quadratiques du vecteur $d\mathrm{M}$, ou, ce qui revient au même (à cause de l'homogénéité de degré zéro) par le quotient de ces formes, calculées pour le vecteur $\mathbf{T}$. Le dénominateur se réduira ainsi à l'unité. Cherchons le numérateur. Par la transformation autométrique qui change $d\mathrm{M}$ en $d\nu$, le vecteur

$$\mathbf{T} = \mathbf{X} \cos\alpha + \mathbf{Y} \sin\alpha$$

devient le vecteur

$$\mathbf{V} = -\frac{\mathbf{X}}{\mathrm{R}_1} \cos\alpha - \frac{\mathbf{Y}}{\mathrm{R}_2} \sin\alpha.$$

Le vecteur $\mathbf{T}$ vient s'appliquer sur Γ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, puisque, par hypothèse, le trièdre $\mathbf{T}, \Gamma, \nu$ est direct. Nous avons donc

$$\Gamma = -\mathbf{X} \sin\alpha + \mathbf{Y} \cos\alpha.$$

La forme quadratique cherchée du vecteur $\mathbf{T}$ est égale à $\Gamma . \mathbf{V}$. Nous obtenons ainsi la formule d'Ossian Bonnet [1]

$$\tau - \frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) \cos\alpha \sin\alpha. \tag{154}$$

(1) En éliminant α entre cette relation et la formule $\frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{R}_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{R}_2} = 0$, qui caractérise les asymptotiques, on verra immédiatement que la torsion de ces lignes est donnée par $\tau^2 \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 + 1 = 0$ $\left(\text{vu l'annulation de } \frac{d\theta}{ds}\right)$.

On devait s'attendre à trouver en facteur le produit $\cos\alpha \sin\alpha$, puisque, par définition même des directions principales, la quantité $\tau - \frac{d\theta}{ds}$ doit s'annuler sur ces directions.

Le signe de $\tau - \frac{d\theta}{ds}$ est déterminé en conséquence par l'orientation de MT par rapport aux directions principales de M : si MT tourne autour de M, le signe de $\tau - \frac{d\theta}{ds}$ change lorsque MT vient à traverser une direction principale. La quantité $\tau - \frac{d\theta}{ds}$ s'appelle *torsion relative* (on dit souvent, mais à tort, *torsion géodésique*).

136. Lignes de courbure. — On nomme *lignes de courbure* celles dont la tangente en chaque point est une direction principale correspondante. Ces lignes sont caractérisées aussi par le fait que $\tau - \frac{d\theta}{ds}$ y est nulle en chacun de leurs points. La formule d'Ossian Bonnet montre immédiatement l'équivalence de ces deux définitions.

A l'aide de cette formule, on démontre aussi sans peine deux propositions classiques relatives aux lignes de courbure, à savoir le théorème de Joachimsthal et celui de Dupin.

Théorème de Joachimsthal. — *Si deux surfaces se coupent à angle constant le long d'une courbe C, et si C est une ligne de courbure pour l'une d'elles, elle est aussi une ligne de courbure de l'autre.*

Soient les surfaces S et S_1 qui se coupent suivant C, à angle constant. Par hypothèse C est ligne de courbure de S. Donc sa torsion relative à la surface S,

$$\tau - \frac{d\theta}{ds},$$

est nulle. Formons maintenant la torsion relative à la surface S_1,

$$\tau - \frac{d\theta_1}{ds}.$$

Cette quantité ne diffère pas de la précédente, en vertu de la constance de l'angle $\theta_1 - \theta$ des normales aux deux surfaces le long de C. Donc elle est également nulle, et C est bien une ligne de courbure de S_1. Le théorème est donc établi et sa réciproque est immédiate.

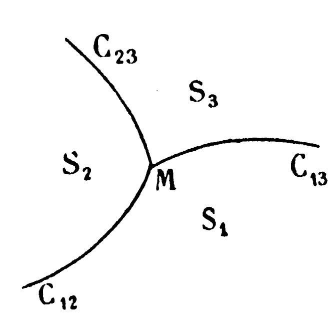
Théorème de Dupin. — *Les surfaces d'un système triple orthogonal se coupent deux à deux suivant leurs lignes de courbure.*

En effet, considérons trois familles de surfaces F_1, F_2, F_3, répondant aux conditions suivantes, qui définissent un système triple orthogonal :

1° Par tout point M de l'espace, on peut mener une surface S_1 et une seule de la famille F_1, une surface S_2 et une seule de la famille F_2, une surface S_3 et une seule de la famille F_3.

2° Les surfaces S_2 et S_3 se coupent orthogonalement tout le long de leur courbe commune C_{23}, les surfaces S_3 et S_1 se coupent orthogonalement le long de C_{13}, les surfaces S_1 et S_2 le long de C_{12}.

Je dis que toutes les courbes C_{12}, C_{13}, C_{23} sont les lignes de courbure des surfaces telles que S_1. En effet, nous pouvons parler de la torsion relative de C_{12} par exemple, sans préciser si elle est relative à S_1 ou à S_2, puisque ces surfaces se coupent à *angle constant*. Appelons donc τ_{12}, τ_{13}, τ_{23} les torsions relatives de C_{12}, C_{13}, C_{23}. De la formule d'Ossian Bonnet résulte immédiatement que les torsions relatives de deux courbes orthogonales d'une même surface sont opposées. Nous aurons donc trois fonctions τ_{12}, τ_{13}, τ_{23} définies en tous les points de l'espace, et satisfaisant partout aux trois relations



$$\tau_{12}+\tau_{13}=0, \qquad \tau_{23}+\tau_{12}=0, \qquad \tau_{13}+\tau_{23}=0.$$

Ces trois fonctions sont donc nulles en tout point de l'espace. Le théorème en résulte.

137. Normalies. — Les lignes de courbure possèdent une autre propriété caractéristique très importante. Ce sont les lignes le long desquelles les normales à la surface forment une surface développable, ou, ce qui revient au même, le long desquelles ces normales admettent une enveloppe.

Il est facile de traduire cette condition. Soit C une courbe de S, le long de laquelle les normales à S admettent une enveloppe E. La normale en M touche cette enveloppe en un point P, et nous avons

$$\mathbf{MP}=l\nu,$$

en désignant par l un certain scalaire. Pour exprimer que le lieu de P est l'enveloppe de MP, il faut écrire que dP est colinéaire à ν. Or, de l'équation précédente, nous déduisons, en dérivant par rapport à l'abscisse curviligne s de M sur C,

$$\frac{dP}{ds}-\frac{dM}{ds}=l\frac{d\nu}{ds}+\nu\frac{dl}{ds},$$

d'où

$$\frac{dP}{ds}-\nu\frac{dl}{ds}=\mathbf{T}(1-\rho l\cos\theta)-\Gamma\left(\tau-\frac{d\theta}{ds}\right)l.$$

Les vecteurs ν, $\mathbf{T}$, Γ forment un système fondamental. Donc l'identité ci-dessus ne peut permettre à dP d'être colinéaire à ν que si l'on a à la fois

$$\tau-\frac{d\theta}{ds}=0,$$
$$1-\rho l\cos\theta=0,$$
$$dP-\nu\, dl=0.$$

La première de ces relations exprime que C est une ligne de courbure, la seconde que l'on a

$$l=\frac{1}{\rho\cos\theta}=R,$$

R étant relatif à une section normale principale. Cela s'exprime également en disant que P est centre de courbure principal de la surface.

Enfin la dernière nous apprend qu'un arc de l'enveloppe a pour longueur la

différence des portions de normale à S qui sont tangentes à cet arc en chaque extrémité et qui sont limitées d'autre part à leurs points d'incidence.

En somme, la courbe E est une *développée* de C.

On donne le nom de *normalies* aux surfaces développables engendrées par les normales à S aux points d'une même ligne de courbure. Ces surfaces ont leurs arêtes de rebroussement sur l'une des nappes de la surface lieu des centres de courbure.

Les normalies se partagent en deux familles : par une normale à S passent deux normalies, une de chaque famille. Tout le long de cette normale, le plan tangent de chacune d'elles est invariable et orthogonal au plan tangent de l'autre.

Il en résulte que le système des normalies et l'ensemble des surfaces déduites de S en portant sur les normales à cette dernière à partir de leurs points d'incidence des longueurs constantes forme un système triple orthogonal.

Étant donnée une surface S, on peut donc l'englober dans un système triple orthogonal au moins. On en déduit immédiatement que l'inversion conserve les lignes de courbure : en effet cette transformation conserve les angles. Donc elle change un système triple orthogonal en un autre système analogue. Toute surface pouvant être englobée dans un système triple orthogonal, la proposition est donc démontrée.

138. Ombilics. — Nous avons étudié, dans le cas général, la correspondance linéaire entre dM et $d\nu$, et nous avons établi qu'elle est autométrique. En particulier, il peut arriver qu'en certains points M de la surface étudiée cette correspondance se réduise à une homothétie, la direction de toute tangente issue d'un tel point étant alors principale. De tels points sont aussi caractérisés par la circonstance suivante : l'égalité des deux rayons de courbure principaux. A l'exclusion de tous les autres points, ils possèdent aussi cette propriété : c'est qu'il y passe une infinité de lignes de courbure. On donne à ces points remarquables le nom d'*ombilics* de la surface.

La seule surface (réelle) *dont tous les points sont des ombilics est une sphère.*

En effet, toute ligne de cette surface est une ligne de courbure, car en chaque point la tangente est principale. Appliquons ce théorème à l'intersection de la surface et d'un plan : ce plan coupe la surface à angle constant (réciproque du théorème de Joachimsthal). En particulier, un plan normal en un certain point M est aussi normal à la surface tout le long de la section qu'il y détermine. Les normales en tous les autres points de la surface rencontrent donc la normale en M.

Par suite, la surface est de révolution autour de chacune de ses normales. Elle se réduit donc à une sphère et le théorème est établi.

Notons aussi que l'inversion, puisqu'elle conserve les lignes de courbure, conserve de ce fait même les ombilics, puisque ces points sont aussi ceux par lesquels passent des lignes de courbure, en nombre infini.

Signalons enfin que les ombilics sont encore les points où l'indicatrice d'Euler (note de la page 142) se réduit à une circonférence. On démontre en géométrie analytique [1] que pour une quadrique, l'indicatrice en un point M est rigoureuse-

(1) Voir notre *Cours de Géométrie analytique*, n° 223. Voir aussi le n° 199, relatif aux sections circulaires des quadriques.

ment homothétique aux sections de cette surface par les plans parallèles au plan tangent en M. Les ombilics d'une quadrique sont donc à l'intersection de cette surface avec les plans diamétraux conjugués des plans de sections circulaires. En particulier, un ellipsoïde à axes inégaux possède quatre ombilics réels.

139. Autre association géodésique d'éléments externes : courbure géodésique. — Nous avons montré que la courbure totale $\frac{1}{R_1 R_2}$ est un élément géodésique d'une surface. Il est impossible de passer sous silence un autre élément possédant la même propriété : *la courbure géodésique.*

Reprenons la courbe C tracée sur la surface S et douée d'un sens positif, et désignons toujours par s l'abscisse curviligne d'un point de cette courbe. Nous avons

$$\frac{dM}{ds} = \mathbf{T},$$
$$\frac{d^2M}{ds^2} = \rho \mathbf{N},$$

ρ désignant la courbure au point M. En considérant un mode quelconque de représentation paramétrique de la courbe, nous pouvons écrire

$$\frac{dM}{ds} = \frac{\partial M}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{ds} + \frac{\partial M}{\partial \mu}\frac{d\mu}{ds},$$
$$\frac{d^2M}{ds^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\mu}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \frac{\partial M}{\partial\lambda}\frac{d^2\lambda}{ds^2} + \frac{\partial M}{\partial\mu}\frac{d^2\mu}{ds^2}.$$

Dans le système fondamental $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \mu}$, ν, le vecteur $\frac{d^2M}{ds^2}$ a pour composantes covariantes

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{d^2M}{ds^2}, \qquad \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{d^2M}{ds^2} \qquad \text{et} \qquad \nu\cdot\frac{d^2M}{ds^2}.$$

Considérons le vecteur de composantes covariantes

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{d^2M}{ds^2}, \qquad \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{d^2M}{ds^2}, \quad 0,$$

qui n'est autre que la projection du vecteur $\frac{d^2M}{ds^2}$ sur le plan tangent en M. Les composantes covariantes de ce vecteur s'écrivent respectivement

$$\frac{d^2M}{ds^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial\lambda} = \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\mu}{ds} + \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\partial M}{\partial\lambda}\right)^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} + \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial M}{\partial\mu}\frac{d^2\mu}{ds^2},$$

et

$$\frac{d^2M}{ds^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial\mu} = \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\mu}{ds} + \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2$$
$$+ \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial M}{\partial\mu}\frac{d^2\lambda}{ds^2} + \left(\frac{\partial M}{\partial\mu}\right)^2\frac{d^2\mu}{ds^2}.$$

Dans les deux formules précédentes, chacun des seconds membres est la somme :

1° d'une forme linéaire en $\frac{d^2\lambda}{ds^2}$ et $\frac{d^2\mu}{ds^2}$, ayant comme coefficients deux des trois nombres

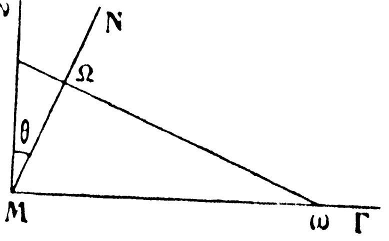
$$\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right)^2, \quad \frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial M}{\partial \mu}, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)^2,$$

c'est-à-dire deux des coefficients de l'élément linéaire ;

2° d'une forme quadratique en $\frac{d\lambda}{ds}$ et $\frac{d\mu}{ds}$, ayant comme coefficients les trois composantes covariantes de rang un dans la première formule, de rang deux dans la seconde, des trois dérivées géométriques secondes $\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda . \partial \mu}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}$. Ces coefficients sont donc les nombres σ, σ', σ'' (dans la 1re formule) et τ, τ', τ'' dans la seconde. Nous avons appris à les exprimer à l'aide des dérivées premières de E, F, G.

De ce calcul, il résulte alors que la projection sur le plan tangent du vecteur $\frac{d^2M}{ds^2}$ est un élément géodésique. Or cette projection s'obtient en multipliant le scalaire ρ par celle de **N**, c'est-à-dire par $\Gamma \sin \theta$. Le vecteur en question s'écrit donc

$$\Gamma \rho \sin \theta.$$



En définitive, cet énoncé se réduit donc au fait que le scalaire $\rho \sin \theta$ est un élément géodésique. On l'appelle *courbure géodésique* (1). Soit Ω le centre de courbure en M. Menons en ce point, dans le plan normal, la perpendiculaire à la normale principale, qui rencontre la normale géodésique en ω. Nous avons

$$\rho \sin \theta = \frac{\sin \theta}{M\Omega} = \frac{1}{M\omega}.$$

Or $M\omega$ est, d'après le théorème de Meusnier, le rayon de courbure en M de la projection de C sur le plan tangent en M.

Ainsi, la courbure géodésique est aussi la courbure de la projection de C sur le plan tangent au point considéré.

Nous montrerons plus tard que la courbure géodésique est liée à la courbure totale. Mais, avant d'entreprendre l'étude systématique des éléments géodésiques, il sera commode de compléter la théorie des opérations infinitésimales du calcul vectoriel. Tel sera maintenant notre but : lorsque nous l'aurons atteint, nous reviendrons ensuite à la théorie des surfaces pour la compléter et la généraliser.

(1) Le vecteur $\Gamma \rho \sin \theta$ s'appelle *vecteur de courbure géodésique*.

IV

Éléments différentiels invariants des fonctions scalaires en géométrie linéaire ou métrique.

140. Développement de l'accroissement d'une fonction scalaire. — Nous avons considéré, dans la première partie de ces leçons, des fonctions scalaires de vecteurs libres et des fonctions scalaires de points. Dans un espace linéaire, on peut faire correspondre, d'une manière biunivoque, un point et un vecteur libre : étant donné un vecteur libre **V**, on fera choix, une fois pour toutes, d'une origine O, et on fera correspondre à ce vecteur le point M tel que

$$\mathbf{OM} = \mathbf{V}.$$

Réciproquement, à chaque point M correspondra, de cette manière, un vecteur **V** et un seul.

Nous pouvons donc nous borner à raisonner sur des fonctions scalaires d'un point. En vue des applications à la Physique, ces fonctions sont d'ailleurs les plus utiles.

Nous nous placerons tout d'abord au point de vue de la géométrie linéaire, et nous supposerons, pour fixer les idées, que le nombre des dimensions de l'espace est égal à trois.

Soit F(M) une fonction scalaire du point M. Prenons quatre points O, A, B, C non situés dans un même plan et exprimons le vecteur **OM** sous la forme

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} + z\mathbf{OC}.$$

La fonction F(M) a pour expression une quantité $f(x, y, z)$ dépendant des trois coordonnées du point M. L'accroissement de cette fonction, lorsqu'on passe du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au point $M(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ se calcule, en analyse ordinaire, par la formule de Taylor :

$$(155)\quad f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + lf'_{z_0} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}(hf'_x + kf'_y + lf'_z)^{(n)}_{\substack{x_0+\theta h \\ y_0+\theta k \\ z_0+\theta l}},$$

où θ désigne un nombre compris entre 0 et 1.

Pour donner à cette formule un caractère indépendant du système fondamental choisi, nous pouvons l'écrire

$$(156)\quad F(M) - F(M_0) = \Phi_1(M_0, \mathbf{M_0M}) + \Phi_2(M_0, \mathbf{M_0M}) + \ldots + \Phi_n(M_0, \theta\mathbf{M_0M}),$$

en appelant $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ des fonctions qui dépendent à la fois du point M_0 et du vecteur libre $\mathbf{M_0M}$, et qui par rapport à ce dernier sont entières, homogènes, et des degrés respectifs 1, 2, ..., n. Lorsque M tend vers M_0, la forme linéaire Φ_1 donne

la partie principale de $F(M) - F(M_0)$: elle a donc une signification invariante. De même Φ_2 est la partie principale de $F(M) - F(M_0) - \Phi_1(M_0, \mathbf{M_0M})$, et a aussi une signification invariante. En raisonnant de cette manière, on démontre de proche en proche que tous les termes du second membre possèdent la même propriété.

En résumé, étant donnée une fonction scalaire, le processus classique du calcul différentiel nous conduit à y attacher, en chaque point de son domaine d'existence, toute une suite de formes invariantes, de degrés respectifs 1, 2, ..., suite qui sera illimitée si la fonction étudiée est analytique dans ce domaine. Ces formes sont les *différentielles* des divers ordres de la fonction.

En particulier, la forme $\Phi_1(M_0, \mathbf{dM})$ est la différentielle première au point M_0. Elle intervient dans le calcul de la dérivée de la fonction composée $F(M)$, qui s'obtient en assujettissant le point M à dépendre d'un unique paramètre λ. Il n'est pas nécessaire de donner une démonstration nouvelle, et une simple adaptation de notations nous donne la formule

$$\frac{d}{d\lambda}F(M) = \Phi_1\left(M, \frac{dM}{d\lambda}\right). \tag{157}$$

Nous aurions de même

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}F(M) = \Phi_2\left(M, \frac{dM}{d\lambda}\right) + \Phi_1\left(M, \frac{d^2M}{d\lambda^2}\right). \tag{158}$$

Ces formules se généraliseraient facilement si le point M, au lieu de dépendre d'une seule variable λ, dépendait de deux variables λ et μ.

Remarquons encore à cette occasion que l'on peut rattacher à l'ordre d'idées actuel la règle de dérivation des formes entières et homogènes de vecteurs libres donnée au n° 111. A la formule (156), il suffit de substituer la suivante :

$$F(\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}) - F(\mathbf{V}) = \Psi_1(\mathbf{V}, \Delta\mathbf{V}) + \Psi_2(\mathbf{V}, \Delta\mathbf{V}) + \ldots + \Psi_n(\mathbf{V}, 0\Delta\mathbf{V}).$$

On obtient alors des formules de dérivation telles que

$$\frac{d}{d\lambda}F(\mathbf{V}) = \Psi_1\left(\mathbf{V}, \frac{d\mathbf{V}}{d\lambda}\right),$$

applicables à une fonction $F(\mathbf{V})$ absolument générale, c'est-à-dire non soumise aux restrictions d'intégrité algébrique et d'homogénéité que nous avions introduites dans la première partie par pure commodité.

141. Le point faible du calcul vectoriel. — Le calcul vectoriel nous permet d'écrire sous forme condensée la formule (155), d'en souligner certains caractères remarquables, et même de rattacher à un processus analytique unique le calcul des dérivées successives d'une fonction composée.

Cependant, force nous est de reconnaître que la formule (156) n'est pas la reproduction complète de la formule (155), qu'elle n'en épuise pas le contenu. Alors que cette dernière donne avec précision la loi de formation des termes successifs de degrés 1, 2, ..., n, alors qu'elle en ramène le calcul à des élévations aux puissances symboliques, la formule (156) se borne à reconnaître le caractère de complexité croissante des formes successives $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, sans en révéler la structure.

Évidemment, la difficulté n'est pas insurmontable. Pour la résoudre, il suffit de remarquer qu'en analyse ordinaire la quantité

$$\varphi_2 = (hf'_x + kf'_y + lf'_z)^{(2)}$$

s'obtient en appliquant à la quantité

$$h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z},$$

où h, k et l sont des constantes, l'opération (1)

$$h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}.$$

Donc φ_2 est le résultat de l'application réitérée à f de cette opération. Cette remarque permet alors d'écrire la formule (156) sous cette forme

$$(159) \qquad F(M + \Delta M) - F(M) = DF(M) + \frac{1}{2!}D^2F(M) + \ldots,$$

en désignant par D l'opérateur qui de $F(M)$ permet de passer à $\Phi_1(M, \Delta M)$, étant entendu que dans son application réitérée, ΔM sera regardé comme constant.

La difficulté est résolue et la formule (159) est équivalente à la formule initiale (155), à une modification près des notations : au couple de points M_0, M de (155) nous avons seulement substitué le couple de points M, $M + \Delta M$ de la formule (159).

Mais c'est un grave inconvénient de multiplier les abréviations et de faire abus du symbolisme. On rend ainsi très malaisée la tâche du calculateur en lui imposant l'apprentissage d'un alphabet compliqué.

On a paré à ce danger en construisant un nouvel algorithme, le calcul tensoriel, qui s'inspire du principe suivant : on suppose exprimées dans un système fondamental particulier les composantes et les formes invariantes des divers vecteurs, et on étudie systématiquement, lors de tout changement de ce système, les relations mutuelles entre les modes de variance des coefficients de ces formes. Cette étude se trouve exposée dans la note I, à la fin de ce volume.

Pour le moment, en ce qui concerne la géométrie linéaire, nous nous limiterons à l'étude des différentielles du premier ordre.

$$dF = \Phi_1(M_0, dM).$$

Dans ce but, nous compléterons d'abord la théorie des formes linéaires de vecteurs libres, en en donnant une représentation graphique valable en géométrie linéaire.

142. Représentation graphique d'une forme linéaire d'un vecteur libre. — Soit une forme linéaire invariante d'un vecteur libre : les vecteurs qui l'annulent sont parallèles à une même direction de plans. Deux formes s'annulant pour les vecteurs parallèles à une même direction de plans sont évidemment proportionnelles.

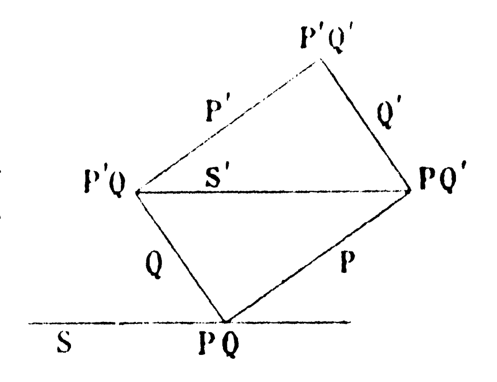
(1) Voir plus loin, n° 165 des généralités sur les opérations et les opérateurs.

et pour les distinguer, il reste à fixer un coefficient de proportionnalité : pour atteindre ce but, il suffit de donner, pour chacune d'elles, à une translation près, un système de deux plans parallèles, tels que la forme soit égale à l'unité pour tout vecteur obtenu en joignant un point du premier plan à un point du second : l'ordre des deux plans est un élément essentiel de la question. En résumé, à chaque forme linéaire invariante correspond ainsi un système de deux plans parallèles ordonnés (à une translation près). Nous donnerons à un tel système le nom de DOUBLET.

A l'addition des formes linéaires ou à la multiplication d'une telle forme par un coefficient (au sens algébrique ordinaire) correspondent l'addition géométrique des doublets et le produit d'un doublet par un scalaire. De la convention comportée par la définition d'un doublet résulte l'énoncé suivant :

Le produit d'un doublet par un scalaire est un doublet parallèle, dont les plans ont pour écart le produit de l'écart du premier doublet par l'inverse de ce scalaire.

Cherchons maintenant à faire la somme géométrique de deux doublets (P, P′) et (Q, Q′). Les quatre plans P, P′, Q, Q′ se coupent deux à deux suivant quatre droites et forment un prisme indéfini, dont toute section est un parallélogramme (la figure représente la section par le plan du tableau). Désignons par PQ, P′Q, PQ′, P′Q′ les quatre arêtes de ce prisme. Il est aisé de voir que le doublet résultant aura ses deux plans S et S′ parallèles au plan diagonal P′Q, PQ′. En effet, chercher les vecteurs qui annulent ce doublet résultant revient à chercher deux vecteurs faisant prendre aux formes des doublets composants des valeurs opposées. Choisissons ces vecteurs dans le plan du tableau. Si nous prenons précisément le segment qu'intercepte dans ce plan notre plan diagonal (réduit à sa bande utile), soit P′Q, PQ′, on voit qu'il fait acquérir la valeur + 1 à la forme du doublet (Q, Q′) et la valeur — 1 à la forme du doublet (P, P′). Le vecteur PQ, P′Q′ ferait acquérir la valeur 1 à chaque forme, donc la valeur 2 à la somme. On en déduit que le doublet résultant peut être représenté par le plan parallèle au plan diagonal précédent, mené par l'arête initiale PQ du prisme (plan n° 1), et par ce plan diagonal lui-même.



De l'addition de deux doublets, on peut passer à celle d'un nombre quelconque de doublets. Remarquons encore que dans le cas de trois doublets (P, P′), (Q, Q′), (R, R′), on obtiendra le doublet somme par une construction qui généralise en tout point, pour une multiplicité linéaire à trois dimensions, la précédente, relative à une multiplicité à deux. Au parallélogramme se substituera un parallélépipède. Le deuxième plan S′ du doublet somme contiendra encore les extrémités des trois arêtes issues du point initial PQR; le premier plan étant le plan parallèle mené par ce point initial.

Grâce à cette représentation, des théorèmes d'algèbre, tels que celui qui affirme la possibilité d'exprimer une forme linéaire quelconque par une combinaison linéaire

de trois formes fondamentales, se transforment en théorèmes de la géométrie des doublets : tout doublet est décomposable en une combinaison linéaire des doublets fondamentaux.

Nous prendrons comme doublets fondamentaux les couples de faces opposées du parallélépipède des vecteurs fondamentaux, les plans initiaux de chaque doublet passant par l'origine du système (dont l'ensemble est indifférent à une translation). De cette manière, en appelant $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ les formes fondamentales, le résultat de l'application de la forme

$$\mathfrak{L} = u\mathfrak{P} + v\mathfrak{Q} + w\mathfrak{R}$$

au vecteur

$$\mathbf{V} = x\mathcal{A} + y\mathcal{B} + z\mathcal{C}$$

sera

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathbf{V}) &= u\mathfrak{P}(\mathbf{V}) + v\mathfrak{Q}(\mathbf{V}) + w\mathfrak{R}(\mathbf{V}) \\ &= u[x\mathfrak{P}(\mathcal{A}) + y\mathfrak{P}(\mathcal{B}) + z\mathfrak{P}(\mathcal{C})] + v[x\mathfrak{Q}(\mathcal{A}) + y\mathfrak{Q}(\mathcal{B}) + z\mathfrak{Q}(\mathcal{C})] \\ &\qquad + w[x\mathfrak{R}(\mathcal{A}) + y\mathfrak{R}(\mathcal{B}) + z\mathfrak{R}(\mathcal{C})]. \end{aligned}$$

De nos définitions il résulte qu'il ne subsiste dans chaque crochet qu'un coefficient non nul et que ce coefficient est précisément l'unité. Il reste ainsi

$$\mathfrak{L}(\mathbf{V}) = ux + vy + wz.$$

143. Gradient linéaire d'une fonction de point. — Considérons une fonction de point F (M). Sa différentielle première au point M_0 est la forme linéaire invariante

$$(160) \qquad dF = \Phi_1(M_0, dM).$$

Nous appellerons gradient linéaire de F en M_0 le doublet représentatif de cette forme. La direction des plans du doublet est empruntée aux petits vecteurs dM qui satisfont à la relation

$$\Phi_1(M_0, dM) = 0,$$

c'est-à-dire pour lesquels $F(M) - F(M_0)$ est du second ordre. Cette direction est donc celle du plan tangent en M à la surface

$$F(M) = F(M_0).$$

On pourra prendre comme plan initial du doublet ce plan tangent, le deuxième plan étant le lieu des points M_1 vérifiant la relation

$$(161) \qquad \Phi_1(M_0, \mathbf{M_0M_1}) = 1.$$

Le doublet qui constitue le gradient linéaire a ses plans d'autant plus rapprochés que F varie, lorsqu'on s'écarte de la surface $F(M) - F(M_0) = 0$, à partir du point M_0, d'une manière plus rapide.

Nous allons voir maintenant l'aspect que prend la représentation des formes et l'étude de la différentielle première en géométrie métrique.

144. Réductibilité d'une forme linéaire à un produit scalaire, en géométrie métrique. — A ce nouveau point de vue, la considération du doublet n'est

plus indispensable, car une forme linéaire invariante est immédiatement réductible à son produit scalaire, dont les deux facteurs sont respectivement le vecteur variable de la forme, et un vecteur fixe qui correspond d'une manière univoque à cette forme.

En effet, considérons le doublet figuratif de la forme, et soit δ le vecteur unité, mené perpendiculairement au doublet, et du premier plan vers le second. Appelons a la distance des plans du doublet. Pour tout vecteur $\mathbf{V}_1$ tel que

$$\mathbf{V}_1 . \delta = a,$$

la forme $\mathfrak{L}(\mathbf{V}_1)$ qui correspond au doublet sera égale à 1. Pour tout autre vecteur $\mathbf{V}$, elle aura pour expression

$$\mathbf{V} . \frac{\delta}{a},$$

car en posant $\mathbf{V} = m\mathbf{V}_1$, nous aurons

$$\mathfrak{L}(\mathbf{V}) = m\mathfrak{L}(\mathbf{V}_1) = m\mathbf{V}_1 . \frac{\delta}{a} = \mathbf{V} . \frac{\delta}{a}. \tag{162}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

A chaque doublet associons le vecteur $\frac{\delta}{a}$, *normal à ce doublet et de longueur inverse de la distance des plans du doublet. La forme* $\mathfrak{L}(\mathbf{V})$ *qui correspond à ce doublet est égale au produit scalaire*

$$\mathbf{V} . \frac{\delta}{a}.$$

145. Gradient métrique d'une fonction de point. — Cette remarque va nous permettre de représenter par un vecteur la différentielle première d'une fonction de point F(M), en géométrie métrique. Si nous posons

$$dF = \Phi_1(M_0, dM) = \mathbf{U}_0 . dM, \tag{163}$$

le vecteur $\mathbf{U}_0$ sera par définition le *gradient métrique*, ou plus brièvement, le gradient de la fonction F(M) au point M_0. D'après ce qui précède, *ce vecteur sera normal en* M_0 *à la surface*

$$F(M) = F(M_0). \tag{S}$$

La relation (163) nous montre, d'après la définition du produit scalaire, que dF est positif lorsque dM fait avec U_0 un angle aigu. Donc *le gradient a pour sens celui des* F *croissants*, le long des trajectoires orthogonales des surfaces S.

Quant à sa longueur, elle est égale au quotient de dF par la projection du déplacement en M sur un axe ayant même direction et même sens que le gradient en question. Si on suppose que dM a précisément cette direction et ce sens, en désignant par dn sa longueur, le gradient pourra s'écrire

$$\mathbf{U}_0 = \left(\frac{dF}{dn}\right)_0 \nu_0, \tag{164}$$

ν_0 désignant le vecteur unité de la normale à la surface, dans le sens des F croissants.

La quantité $\frac{dF}{dn}$ s'appelle *dérivée de* F *suivant la normale en* M_0 à la surface : dénomination légitime, puisqu'elle est la limite du rapport de l'accroissement de F à la longueur d'un déplacement normal infiniment petit.

Plus généralement, *la dérivée de* F *dans une direction* est la limite du rapport de l'accroissement de F à la longueur d'un déplacement infiniment petit, opéré à partir d'un point bien déterminé, le long de cette direction. Soit δ le vecteur unité qui correspond à cette direction, dl la longueur du déplacement infiniment petit, opéré à partir de M_0 dans le sens et dans la direction de δ, de sorte que

$$dM = dl\,\delta \qquad \text{avec} \qquad dl > 0.$$

De la relation (163) nous tirons

$$\frac{dF}{dl} = \mathbf{U}_0 . \delta. \tag{165}$$

En particulier, si nous considérons un système fondamental orthogonal et normal, et si x, y, z sont les coordonnées du point M dans ce système, on pourra écrire

$$F(M) = f(x, y, z).$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont précisément les dérivées de F suivant les demi-droites parallèles aux vecteurs fondamentaux du système. L'équation (165) nous apprend alors que les projections orthogonales du gradient sur ces trois vecteurs fondamentaux sont précisément

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z},$$

résultat qu'on aurait pu déduire aussi de la confrontation des deux formules

$$dF = \mathrm{grad.}\,F . dM, \tag{166}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{167}$$

D'après cela, une condition nécessaire pour que F possède un maximum ou un minimum en un point M_0 strictement intérieur au domaine de continuité de ses dérivées sera

$$\mathrm{grad.}\,F = 0.$$

146. Application aux transformations autométriques. — La notion de gradient s'étend aisément aux fonctions de vecteurs libres. Soit $\varphi(\mathbf{V})$ une telle fonction. Nous poserons encore

$$d\varphi = \mathbf{grad}\,\varphi . d\mathbf{V}. \tag{168}$$

Considérons une transformation autométrique, qui échange **V** en **V**′, et la forme attachée

$$(169) \qquad Q(\mathbf{V}) = \mathbf{V}.\mathbf{V}'.$$

D'après la règle de dérivation du n° **111**, nous avons

$$dQ = 2P(\mathbf{V},\ d\mathbf{V}),$$

en désignant par P la forme polaire de Q ou encore

$$dQ = 2\mathbf{V}'.d\mathbf{V},$$

ce qui montre que le transformé **V**′ de **V** est donné par

$$(170) \qquad \mathbf{V}' = \frac{1}{2}\,\text{grad.}\ Q(\mathbf{V}),$$

ou encore qu'il est égal au demi-gradient de la forme quadratique attachée.

147. L'opérateur Δ_1 et les surfaces parallèles. — A partir d'une distribution spatiale de valeurs scalaires F(M) ou, comme on dit, *d'un champ scalaire*, nous avons défini, d'une manière invariante, un champ vectoriel, en liant à chaque point M le gradient correspondant de F(M). De ce dernier, on peut déduire un nouveau champ scalaire invariant, égal en chaque point de l'espace au carré de la longueur du gradient. L'opérateur par lequel on déduit ce champ du champ initial se représente par la notation Δ_1. Soient x, y, z les coordonnées de M dans un système fondamental orthogonal et normal. Si l'on a dans ce système

$$F(M) = f(x,\ y,\ z),$$

on en déduira

$$(171) \qquad \Delta_1 F(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

Considérons une surface S, et sur ses normales, à partir de leurs points d'incidence, portons une longueur constante l. Nous obtenons une surface S_l parallèle à S : chaque normale à S est également normale à S. Considérons la famille des surfaces S_l correspondant aux diverses valeurs du paramètre l, et définissons une fonction de point, constante sur chacune d'elles : soit $\varphi(l)$ la valeur de cette fonction sur la surface S_l. La nouvelle fonction qu'on déduit de la fonction F(M) ainsi construite en lui appliquant l'opérateur Δ_1 aura pour valeur

$$\Delta_1 F(M) = \varphi'^2(l).$$

Pour les fonctions F(M) de cette catégorie, il y a donc dépendance entre F(M) et Δ_1 F(M). La réciproque est vraie : si les fonctions F et Δ_1F sont liées par une relation de la forme

$$(172) \qquad \Delta_1 F = \Psi(F),$$

les surfaces $F(M) = C^{te}$ sont parallèles.

Pour le démontrer nous simplifierons d'abord l'équation (172). Nous remarquerons à cet effet qu'en désignant par ω une fonction quelconque de F l'équation

$$\omega = \Phi(F)$$

entraîne

$$d\omega = \Phi'(F)\, dF,$$

d'où

$$\text{grad}\, \omega . dM = \Phi'(F)\, \text{grad}\, F . dM,$$

et par suite

(173) $$\text{grad}\, \omega = \Phi'(F)\, \text{grad}\, F.$$

Il en résulte que

(174) $$\Delta_1 \omega = \Phi'^2(F)\, \Delta_1 F\, ;$$

en posant

$$\Psi(F) = \frac{1}{\Phi'^2(F)},$$

nous ramènerons donc l'équation (172) à la forme (¹)

(175) $$\Delta_1 \omega = 1.$$

Il suffit d'étudier l'équation (175). Considérons les surfaces où F(M) prend une valeur constante, soit C, ou, ce qui revient au même, les surfaces où ω (M) prend la valeur constante Φ(C). Les trajectoires orthogonales de ces surfaces sont définies par la condition

$$dM = dl . \text{grad}\, \omega.$$

Puisque le vecteur **grad.** ω a pour longueur 1, la longueur de dM est précisément dl. Écrivons l'équation précédente sous la forme

(176) $$\frac{dM}{dl} = \text{grad}\, \omega,$$

et calculons $\frac{d^2M}{dl^2}$. Si nous montrons que cette quantité est nulle, les coordonnées de M seront des fonctions du premier degré de l. Donc les trajectoires orthogonales seront des droites et le théorème sera établi.

Pour évaluer $\frac{d^2M}{dl^2}$, il nous faut calculer

$$\frac{d}{dl}\, \text{grad}\, \omega.$$

Nous n'avons pas eu l'occasion d'étudier la dérivation géométrique d'un gradient. Il arrive ainsi fréquemment, dans les applications du calcul vectoriel, qu'il se présente des combinaisons d'opérations non encore étudiées. Dans ce cas, qu'on n'hésite jamais

(1) L'hypothèse de la dépendance de F et de $\Delta_1 F$ entraîne donc que, parmi tous les modes d'attribution d'un paramètre distinctif à chaque surface $F = c^{te}$, il existe un mode privilégié, celui qui consiste à choisir pour paramètre la quantité ω ou une variable liée linéairement à ω.

à revenir aux coordonnées, en se souvenant toutefois du caractère invariant des calculs accomplis.

Cette manière d'opérer fournit ici une solution immédiate. En effet, l'équation (176) est équivalente aux trois suivantes

$$\frac{dx}{dl} = \frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dl} = \frac{\partial\omega}{\partial y}, \qquad \frac{dz}{dl} = \frac{\partial\omega}{\partial z},$$

dont la dérivation nous donne

$$\frac{d^2x}{dl^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial z}\frac{dz}{dl} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial z},$$

et deux équations analogues, mais alors on reconnaît dans les seconds membres les demi-dérivées partielles par rapport à x, y, z de la fonction

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2,$$

et il nous reste finalement

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dl^2} = \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}\ \Delta_1\omega.$$

Puisque $\Delta_1.\ \omega$ est égal à 1, en vertu de l'équation (175), le second membre est nul et le théorème est démontré.

Dans les applications, on a fréquemment à calculer le gradient d'une fonction de la distance d'un point à un plan, à un axe, ou à un point. Les surfaces sur lesquelles une telle fonction prend des valeurs constantes sont des plans parallèles, des cylindres de révolution de même axe, ou des sphères concentriques. Ces surfaces ont en commun la propriété d'être parallèles. Sur chacune d'elles la longueur du vecteur gradient sera donc constante. Quant à sa direction, elle sera celle de la perpendiculaire au plan, du rayon du cylindre, ou du rayon de la sphère suivant que la fonction appartient à l'une ou à l'autre des trois catégories précédentes. Examinons successivement les trois cas.

148. Gradient d'une fonction de la distance d'un point à un plan. — Soit le plan P. Prenons un point quelconque M et sa projection m sur le plan P. Soit **u** un vecteur unitaire normal au plan P. En désignant par x un scalaire, nous pouvons écrire

$$\mathbf{mM} = x\mathbf{u}.$$

La fonction F(M) est, dans l'hypothèse actuelle, exprimable au moyen de la seule variable x, sous la forme $f(x)$. Nous aurons donc, dans ce cas,

$$\mathbf{grad}\ \mathrm{F(M)} = f'(x)\mathbf{u}, \tag{177}$$

relation qu'on pourrait déduire aussi de l'identité de définition

$$d\mathrm{F} = \mathbf{grad}\ \mathrm{F(M)}.d\mathrm{M};$$

cette dernière fournit ici une vérification du résultat obtenu, car en y remplaçant **grad** F(M) par la valeur (177), on trouve

$$f'(x)\,dx = f'(x)\,\mathbf{u}.d\mathrm{M}.$$

Or le produit scalaire $\mathbf{u}.d\mathrm{M}$ est bien égal à dx.

149. Gradient d'une fonction de la distance d'un point à un axe. — Considérons un axe fixe Δ, et projetons un point M de l'espace en m sur cet axe. Désignons par ρ la distance mM et soit F(M) une fonction réductible à l'expression $f(\rho)$. Le gradient de cette fonction, d'après les remarques du n° 147, sera de la forme

$$\mathbf{grad}\,\mathrm{F}(\mathrm{M}) = \varphi(\rho)\mathbf{mM}.$$

Pour déterminer $\varphi(\rho)$, servons-nous de l'identité de définition

$$d\mathrm{F} = \mathbf{grad}\,\mathrm{F}(\mathrm{M}).d\mathrm{M}.$$

En y portant la valeur précédente, nous aurons

$$f'(\rho)\,d\rho = \varphi(\rho)\,\mathbf{mM}.d\mathbf{M} = \varphi(\rho)\,\rho\,d\rho,$$

d'où

$$\varphi(\rho) = \frac{f'(\rho)}{\rho},$$

et par suite

(178) $$\mathbf{grad}\,\mathrm{F}(\mathrm{M}) = f'(\rho)\frac{\mathbf{mM}}{\rho}.$$

150. Gradient d'une fonction de la distance d'un point à un centre fixe. — Considérons un centre fixe O, un point quelconque M, et une fonction F(M) qui dépend uniquement de la distance

$$\mathrm{OM} = r.$$

Soit $f(r)$ l'expression de F(M) au moyen de r. D'après les remarques du n° 147, nous pourrons écrire

$$\mathbf{grad}\,\mathrm{F}(\mathrm{M}) = \varphi(r)\mathbf{OM}.$$

Pour déterminer la fonction $\varphi(r)$, nous aurons de nouveau recours à l'identité de définition, qui nous donne ici

$$d\mathrm{F} = f'(r)\,dr = \mathbf{grad}\,\mathrm{F}(\mathrm{M}).d\mathrm{M} = \varphi(r)\,\mathbf{OM}.d\mathrm{M},$$

d'où

$$f'(r)\,dr = \varphi(r)\,r\,dr,$$

et par suite

$$\varphi(r) = \frac{f'(r)}{r}.$$

En définitive, nous aurons donc ici

(179) $$\mathbf{grad}\,\mathrm{F}(\mathrm{M}) = f'(r)\frac{\mathbf{OM}}{r},$$

formule tout à fait analogue à la formule (178).

151. Composantes du gradient dans un système quelconque de coordonnées. — Supposons que l'on fasse subir aux nombres x, y, z, qui expriment les coordonnées du point M dans un système orthogonal et normal, un changement de variables défini par les formules

$$x = f(u, v, w),$$
$$y = g(u, v, w),$$
$$z = h(u, v, w).$$

Pour individualiser un point M de l'espace, on pourra donner les nombres u, v, w qui constituent, dans un sens généralisé, un nouveau système de coordonnées de ce point. Avec ces nouvelles notations, nous serons amenés à écrire

$$d\mathrm{M} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial w} dw.$$

Considérons une fonction $\Phi(\mathrm{M})$, qui s'exprimerait à l'aide des coordonnées généralisées sous la forme $\varphi(u, v, w)$. Appliquons la définition du gradient :

$$d\Phi = \mathbf{grad}\,\Phi(\mathrm{M}) . d\mathrm{M},$$

ou

$$d\Phi = \mathbf{grad}\,\Phi(\mathrm{M}) . \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} du + \mathbf{grad}\,\Phi(\mathrm{M}) . \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} dv + \mathbf{grad}\,\Phi(\mathrm{M}) . \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial w} dw.$$

Cette relation nous fait connaître les trois composantes covariantes de $\mathbf{grad}\,\Phi(\mathrm{M})$, dans le système fondamental des trois vecteurs $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}$, $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial w}$. Nous aurons

$$\mathbf{grad}\,\Phi(\mathrm{M}) . \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$
$$\mathbf{grad}\,\Phi(\mathrm{M}) . \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$
$$\mathbf{grad}\,\Phi(\mathrm{M}) . \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial w} = \frac{\partial \varphi}{\partial w}.$$

Pour trouver les composantes contrevariantes du gradient dans le même système, on aura recours à l'expression de $d\mathrm{M}^2$, laquelle est une forme quadratique en du, dv, dw. Le calcul se fera d'une manière analogue à celle que nous avons indiquée au n° 124. Sans traiter le cas général, envisageons le passage des coordonnées orthogonales et normales aux coordonnées sphériques. Posons donc

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = r \cos\theta.$$

Nous aurons

$$d\mathrm{M}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

Les vecteurs fondamentaux sont respectivement $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial r}$, $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi}$. Soit à évaluer le gradient de la fonction

$$\mathrm{F}(\mathrm{M}) = f(r, \theta, \varphi).$$

D'après les formules précédentes, nous aurons

$$\operatorname{grad} F(M) . \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r},$$

$$\operatorname{grad} F(M) . \frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

$$\operatorname{grad} F(M) . \frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

formules dont nous allons tirer les coordonnées contrevariantes, de manière à expliciter le gradient cherché sous la forme

$$\operatorname{grad} F(M) = h\frac{\partial M}{\partial r} + k\frac{\partial M}{\partial \theta} + l\frac{\partial M}{\partial \varphi}.$$

Faisons le produit scalaire des deux membres par $\frac{\partial M}{\partial r}$, $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$, et remarquons qu'après cette opération, les coefficients de h, k, l dans le second membre sont des coefficients de l'élément linéaire. Il y a d'ailleurs simplification par l'annulation des trois produits $\frac{\partial M}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial M}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial M}{\partial r}$, $\frac{\partial M}{\partial r} \cdot \frac{\partial M}{\partial \theta}$, provenant de la triple orthogonalité du système. On trouve finalement

$$h = \frac{\partial f}{\partial r}, \qquad k = \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \qquad l = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$(180) \qquad \operatorname{grad} F(M) = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial M}{\partial \varphi}.$$

La formule (179) n'est qu'un cas particulier de cette formule générale, celui où $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ sont nuls. Il est manifeste qu'on peut écrire indifféremment $\frac{\partial M}{\partial r}$ ou $\frac{\mathbf{OM}}{r}$.

152. Vecteurs et opérateurs scalaires invariants, dans l'étude simultanée de deux ou de trois fonctions de point. — Nous resterons dans le domaine métrique. Soient F(M) et G(M) deux fonctions du point M. En désignant par α et β deux constantes quelconques, les équations

$$F(M) = \alpha,$$
$$G(M) = \beta$$

représentent une courbe $C_{\alpha\beta}$, intersection des deux surfaces définies par chacune d'elles.

Les éléments différentiels du premier ordre, relatifs à chaque fonction F et G, se déduisent respectivement de leurs gradients. Toute combinaison invariante, scalaire ou vectorielle, de ces deux gradients interviendra dans l'étude simultanée des fonctions F et G.

Par définition, nous poserons

$$(181) \qquad \Delta(F, G) = \operatorname{grad} F . \operatorname{grad} G,$$

opérateur qui, en coordonnées orthogonales et normales, conduit à l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z},$$

lorsqu'on l'applique aux deux fonctions

$$F = f(x, y, z),$$
$$G = g(x, y, z).$$

Lorsque G est identique à F, cet opérateur se réduit à l'opérateur Δ_1, précédemment étudié.

On peut remarquer que le système des courbes $C_{\alpha\beta}$ n'est pas modifié, lorsqu'aux fonctions F(M) et G(M), on substitue deux nouvelles fonctions $\Phi(F, G)$ et $\Psi(F, G)$ (1). En généralisant le raisonnement d'où nous avons déduit la formule (173) du n° 147, nous trouverons

$$(182) \qquad \operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial F}\operatorname{grad} F + \frac{\partial \Phi}{\partial G}\operatorname{grad} G,$$

$$(183) \qquad \operatorname{grad}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial F}\operatorname{grad} F + \frac{\partial \Psi}{\partial G}\operatorname{grad} G.$$

En faisant le produit scalaire, nous obtiendrons la formule

$$(184) \quad \Delta(\Phi, \Psi) = \frac{\partial \Phi}{\partial F}\frac{\partial \Psi}{\partial F}\Delta_1 F + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial F}\frac{\partial \Psi}{\partial G} + \frac{\partial \Phi}{\partial G}\frac{\partial \Psi}{\partial F}\right)\Delta(F, G) + \frac{\partial \Phi}{\partial G}\frac{\partial \Psi}{\partial G}\Delta_1 G,$$

qui fait connaître le mécanisme de transformation de l'opérateur Δ, lorsqu'on procède à un changement du couple F, G, en respectant le système des $C_{\alpha\beta}$. Cette formule contient comme cas particulier la suivante

$$(185) \qquad \Delta_1 \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial F}\right)^2 \Delta_1 F + 2\frac{\partial \Phi}{\partial F}\frac{\partial \Phi}{\partial G}\Delta(F, G) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial G}\right)^2 \Delta_1 G.$$

Passons maintenant à l'étude du produit vectoriel

$$\operatorname{grad} F \wedge \operatorname{grad} G.$$

Il est perpendiculaire au plan de la normale à la surface $F = c^{te}$ et de la normale à la surface $G = c^{te}$. Sa direction est donc celle de la tangente en M à la courbe $C_{\alpha\beta}$ qui passe en ce point. Pour trouver la loi de transformation de ce vecteur, multiplions vectoriellement et membre à membre les équations (182) et (183). Il vient (2)

$$(186) \qquad \operatorname{grad}\Phi \wedge \operatorname{grad}\Psi = \frac{D(\Phi, \Psi)}{D(F, G)}\operatorname{grad} F \wedge \operatorname{grad} G.$$

Supposons que F et G soient deux fonctions indépendantes. Pour que Φ et Ψ soient dépendantes, il faut et il suffit, en vertu de cette formule, que l'on ait

$$\operatorname{grad}\Phi \wedge \operatorname{grad}\Psi = 0$$

(1) Dans l'attribution à chaque courbe $C_{\alpha\beta}$ du système de deux paramètres distinctifs, il n'existe, en général, aucune raison de donner la préférence à tel ou tel couple de fonctions de points : il n'y a pas de couple *privilégié*.

(2) La quantité $\frac{\partial \Phi}{\partial F}\frac{\partial \Psi}{\partial G} - \frac{\partial \Psi}{\partial F}\frac{\partial \Phi}{\partial G}$ n'est autre que le déterminant fonctionnel $\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(F, G)}$ des deux fonctions Φ et Ψ, dont l'annulation exprime la *dépendance* de ces fonctions. Voir Goursat, Analyse, t. I.

ou encore

$$\mathbf{grad}\,\Psi = \lambda\,\mathbf{grad}\,\Phi;$$

dans ces conditions, la quantité λ sera elle-même fonction de Φ et aura pour valeur $\frac{d\Psi}{d\Phi}$ d'après l'identité de définition du gradient.

Dans l'étude simultanée de trois fonctions de points F(M), G(M), H(M) se présenterait pareillement le déterminant

$$(\mathbf{grad}\,F,\ \mathbf{grad}\,G,\ \mathbf{grad}\,H)$$

et on démontrerait d'une manière analogue que son annulation équivaut, si elle a lieu identiquement, à l'existence d'une relation entre les fonctions F, G, H lorsque trois gradients sont coplanaires, et de deux relations si ces gradients sont colinéaires.

Notons enfin une particularité remarquable : étant données trois fonctions F, G, H indépendantes, si à chaque point M de l'espace, on associe les valeurs

$$u = F(M), \qquad v = G(M), \qquad w = H(M)$$

de ces trois fonctions, on pourra avoir l'occasion de lier à ce point M deux systèmes de vecteurs, dont la considération s'impose d'une façon toute particulière à notre attention. Ce sont respectivement les deux systèmes

$$(\Sigma) \qquad \mathbf{grad}\,F(M), \qquad \mathbf{grad}\,G(M), \qquad \mathbf{grad}\,H(M)$$

d'une part, et

$$(S) \qquad \frac{\partial M}{\partial u}, \qquad \frac{\partial M}{\partial v}, \qquad \frac{\partial M}{\partial w}$$

de l'autre. Remarquons que d'après la définition du gradient, on peut écrire

$$\mathbf{grad}\,F(M).dM = du, \qquad \mathbf{grad}\,G(M).dM = dv, \qquad \mathbf{grad}\,H(M).dM = dw,$$

formules qui expriment que le vecteur dM a mêmes composantes, de la première espèce dans (S) et de la seconde dans (Σ). Comme dM est arbitraire, ces deux systèmes sont donc *réciproques* au sens du n° 78.

153. Étude métrique de la différentielle seconde d'une fonction F(M). — La différentielle seconde, que nous avons écrite précédemment sous la forme

$$(187) \qquad d^2F = \Phi_2(M_0,\ dM),$$

peut s'obtenir en partant de la différentielle première

$$dF = \Phi_1(M_0,\ dM),$$

et en prenant la différentielle de cette quantité, lorsqu'on regarde dM comme constant. On obtient ainsi une forme quadratique du vecteur dM. En recourant à l'expression $f(x, y, z)$ de F(M) dans un système fondamental orthogonal et normal, cette forme quadratique peut s'écrire

$$(188) \quad d^2F = f''_{x_0^2}dx^2 + f''_{y_0^2}dy^2 + f''_{z_0^2}dz^2 + 2f''_{y_0z_0}dydz + 2f''_{z_0x_0}dzdx + 2f''_{x_0y_0}dxdy.$$

Pour obtenir ses directions principales, il faut exprimer qu'il y a dégénérescence de la forme

$$d^2F - sdM^2$$

qui, dans le système précédent, s'écrit

$$(f''_{x_0^2} - s)dx^2 + (f''_{y_0^2} - s)dy^2 + (f''_{z_0^2} - s)dz^2 + 2f''_{y_0z_0}dydz + 2f''_{z_0x_0}dzdx + 2f_{x_0y_0}dxdy.$$

La quantité s devra vérifier l'équation

(189) $$\begin{vmatrix} f''_{x_0^2} - s & f''_{x_0y_0} & f''_{x_0z_0} \\ f''_{x_0y_0} & f''_{y_0^2} - s & f''_{y_0z_0} \\ f''_{x_0z_0} & f''_{y_0z_0} & f''_{z_0^2} - s \end{vmatrix} = 0,$$

dont les coefficients sont des invariants, conformément à la théorie générale du n° 87. Ces coefficients sont respectivement, après suppression des indices, propres à distinguer un point particulier M_0 :

1° le *hessien*

(190) $$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix};$$

2° l'expression

(191) $$f''_{y^2}f''_{z^2} - (f''_{yz})^2 + f''_{z^2}f''_{x^2} - (f''_{zx})^2 + f''_{x^2}f''_{y^2} - (f''_{xy})^2;$$

3° le *laplacien*

(192) $$\Delta_2 F(M) = f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2};$$

cette dernière opération possède une importance capitale dans la théorie du potentiel newtonien et dans toutes les questions de physique mathématique qui s'y rattachent (équilibre électrique, équilibre calorifique, hydrodynamique, etc...).

Nous limiterons à ces généralités l'étude des opérateurs différentiels invariants attachés aux champs scalaires, et nous passerons à l'étude analogue pour les champs vectoriels.

V

Éléments différentiels invariants des champs de vecteurs. Transformations finies et infinitésimales.

154. Transformation infinitésimale attachée à un champ de vecteurs. — Si l'on fait correspondre à chaque point M de l'espace (en géométrie linéaire ou en géométrie métrique) un vecteur MV lié à ce point, on définit un *champ vectoriel :* nous en avons rencontré un exemple dans la théorie métrique des

systèmes de vecteurs glissants, où nous avons étudié le champ vectoriel constitué par les moments résultants aux divers points de l'espace (nos 105 et suivants).

Nous nous proposons de montrer qu'on peut à tout champ vectoriel faire correspondre, d'une manière univoque, une transformation infinitésimale, et qu'inversement toute transformation infinitésimale donne naissance à un champ vectoriel. En adoptant ce point de vue, nous aurons l'avantage de relier les notions que nous allons introduire à la cinématique des fluides. Considérons une portion d'une masse fluide qui à l'instant t emplit le volume $\mathcal{V}$ d'un certain domaine, et à l'instant $t+dt$ emplit le volume $\mathcal{V}'$ d'un domaine infiniment voisin. Une certaine molécule occupe d'abord une position M à l'intérieur de $\mathcal{V}$, puis une position M' à l'intérieur de $\mathcal{V}'$. Nous sommes donc conduits, pour étudier le changement de configuration de notre masse fluide, entre les instants t et $t+dt$, à considérer la transformation ponctuelle qui fait correspondre les deux points M et M', positions d'une même molécule à ces deux instants. Cette transformation est une transformation infinitésimale, puisque dt est un infiniment petit. Pour la définir on peut, en chaque point M de l'espace, se donner le vecteur infiniment petit $\mathbf{MM}'$, ou, ce qui est plus commode, la limite de

$$\frac{\mathbf{MM}'}{dt},$$

qui, au point de vue cinématique, n'est autre que la vitesse de la molécule qui passe en M à l'instant t.

A la transformation infinitésimale qui définit le changement de configuration du fluide entre les instants t et $t+dt$, on peut donc associer un champ vectoriel, celui des vecteurs *vitesses* des molécules à l'instant t, et inversement, tout champ vectoriel donne naissance à une transformation infinitésimale, définie par la relation

$$\mathbf{MM}' = \mathbf{V}dt,$$

en appelant $\mathbf{V}$ le vecteur du champ lié au point M : c'est la transformation infinitésimale attachée à ce champ.

L'intervention de notions empruntées à la cinématique n'est du reste qu'apparente, et pour rester dans le domaine purement géométrique, il suffit de considérer t (qui, en cinématique, représente le temps) comme un paramètre absolument quelconque. Grâce aux remarques précédentes, on peut donc faire indifféremment la théorie des transformations infinitésimales ou celle des champs de vecteurs.

155. Composition des transformations infinitésimales. — Nous avons expliqué, au n° 7, comment s'opère la composition de deux transformations ponctuelles quelconques, prises dans un ordre donné : appliquant la première à un point M, on en déduit un point M', que la seconde change en un point M''; la transformation composée consiste dans la loi qui fait correspondre M et M''. En général, la composition de deux transformations finies n'est pas commutative.

Nous allons montrer que *les transformations infinitésimales se composent entre elles suivant le processus fort simple de l'addition géométrique*, et par suite que leur composition est commutative.

Pour l'établir rigoureusement, raisonnons sur des familles de transformations ponctuelles dépendant, d'une manière continue, d'un paramètre t, et qui se réduisent, pour $t=0$, à la transformation identique. Nous nous placerons même, bien qu'on puisse faire des hypothèses plus larges, dans le cas où toutes les dépendances mises en jeu dans la question sont de nature analytique. Une famille de transformations du type précédent sera dès lors définie par une équation de la forme

$$(193) \qquad \mathbf{MM'} = \mathbf{V}_1(M)t + \mathbf{V}_2(M)\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{V}_n(M)\frac{t^n}{n!} + \ldots,$$

en désignant par $\mathbf{V}_1(M)$, $\mathbf{V}_2(M)$, ..., $\mathbf{V}_n(M)$ des grandeurs vectorielles bien déterminées en fonction de la position du point M. A une famille du type précédent correspond la transformation infinitésimale définie par l'équation

$$(193\ bis) \qquad \mathbf{MM'^0} = \mathbf{V}_1(M)dt.$$

dont le second membre se déduit de celui de la précédente en lui substituant sa différentielle pour $t=0$. Considérons une famille analogue, qui pour la valeur t fait correspondre à M le point M'_1 défini par

$$(194) \qquad \mathbf{MM'_1} = \mathbf{W}_1(M)t + \mathbf{W}_2(M)\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{W}_n(M)\frac{t^n}{n!} + \ldots.$$

Au point M' cette famille ferait correspondre, pour la valeur t, un point M'' défini par

$$(195) \qquad \mathbf{M'M''} = \mathbf{W}_1(M')t + \mathbf{W}_2(M')\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{W}_n(M')\frac{t^n}{n!} + \ldots.$$

Les transformations composées des deux précédentes formeraient donc à leur tour une famille dépendant du paramètre t, et définie par l'équation

$$(196) \qquad \mathbf{MM''} = [\mathbf{V}_1(M) + \mathbf{W}_1(M')]t + [\mathbf{V}_2(M) + \mathbf{W}_2(M')]\frac{t^2}{2!} + \ldots,$$

et se réduisant pour $t=0$ à la substitution identique. Toutefois, dans cette dernière formule, le point M' dépend à la fois de M et de t, il est donc nécessaire, pour l'écrire sous une forme répondant exactement à celle de la formule (193), d'écrire au préalable les développements

$$\mathbf{W}_1(M') = \mathbf{W}_1(M) + t\mathbf{W}_{11}(M) + \frac{t^2}{2!}\mathbf{W}_{12}(M) + \ldots,$$

$$\mathbf{W}_2(M') = \mathbf{W}_2(M) + t\mathbf{W}_{21}(M) + \frac{t^2}{2!}\mathbf{W}_{22}(M) + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et d'en porter l'expression dans la formule (196), qui devient ainsi

$$(197) \quad \mathbf{MM''} = [\mathbf{V}_1(M) + \mathbf{W}_1(M)]t + [\mathbf{V}_2(M) + \mathbf{W}_2(M) + 2\mathbf{W}_{11}(M)]\frac{t^2}{2!} + \ldots$$

La transformation infinitésimale attachée à cette nouvelle famille, c'est-à-dire la résultante des transformations infinitésimales attachées aux deux familles (193) et (194) est définie par

$$\mathbf{MM}''^0 = [\mathbf{V}_1(M) + \mathbf{W}_1(M)]\,dt, \tag{197 bis}$$

équation qui justifie le résultat précédemment énoncé : pour obtenir le vecteur infiniment petit qui joint le point M à son correspondant dans la transformation résultante, il suffit de faire la somme géométrique des vecteurs infinitésimaux

$$\mathbf{V}_1(M)\,dt \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W}_1(M)\,dt$$

obtenus en joignant le point M à son correspondant dans chaque transformation composante. La formule (197) nous montre en outre qu'à partir des termes en t^2, se fait sentir, dans la composition des transformations finies, l'influence de l'ordre de ces transformations.

La règle de composition des transformations infinitésimales s'énonce simplement en faisant appel aux champs vectoriels qui leur sont attachés, conformément au point de vue du n° 154. Cette composition s'effectue en sommant géométriquement ces champs vectoriels.

156. Étude locale d'une transformation quelconque : transformation linéaire tangente. — Soit une transformation ($\mathfrak{T}$) qui change un point M en un point M′. L'étude locale de cette transformation consiste dans la recherche des lois qui régissent la correspondance entre les points infiniment voisins de M, et leurs transformés, qui sont infiniment voisins de M′, si la transformation est continue. Bien qu'on puisse établir les résultats que nous avons en vue à l'aide d'hypothèses moins restrictives, nous supposerons que la transformation considérée est analytique.

Désignons par ρ une variable scalaire infiniment petite, par **V** un vecteur libre quelconque, par N le point infiniment voisin de M tel que

$$\mathbf{MN} = \rho\mathbf{V};$$

par N′ le correspondant de N dans la transformation ($\mathfrak{T}$). Le vecteur **M′N′** est développable suivant les puissances de ρ, et son développement commence par un terme en ρ. En général, ce terme n'est pas nul et constitue la partie principale du développement de **M′N′**. Désignons par $\mathbf{M'N'_1}$ le vecteur, lié à M′, dont la grandeur géométrique est égale à cette partie principale. Nous allons montrer que la transformation qui associe les points N et N'_1 est linéaire.

En effet, lions au point M trois vecteurs quelconques $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$, non coplanaires, nous pourrons écrire tout vecteur $\rho\mathbf{V}$ sous la forme

$$\rho\mathbf{V} = x\mathfrak{P} + y\mathfrak{Q} + z\mathfrak{R}, \tag{198}$$

x, y, z étant eux-mêmes des infiniment petits [1]. Aux points P, Q, R tels que

$$\mathbf{MP} = x\mathfrak{P}, \qquad \mathbf{MQ} = y\mathfrak{Q}, \qquad \mathbf{MR} = z\mathfrak{R}$$

[1] Dans toute la suite du raisonnement, nous supposons implicitement que l'on a $x = \rho\xi$, $y = \rho\eta$, $z = \rho\zeta$, en désignant par ξ, η, ζ des quantités finies.

correspondent, par la transformation ($\mathfrak{T}$), des points P′, Q′, R′, tels que l'on ait

$$(199) \quad \begin{cases} \mathbf{M'P'} = x\mathfrak{L}' + \frac{x^2}{2!}\mathfrak{L}'' + \frac{x^3}{3!}\mathfrak{L}''' + \dots, \\ \mathbf{M'Q'} = y\mathfrak{Q}' + \frac{y^2}{2!}\mathfrak{Q}'' + \frac{y^3}{3!}\mathfrak{Q}''' + \dots, \\ \mathbf{M'R'} = z\mathfrak{R}' + \frac{z^2}{2!}\mathfrak{R}'' + \frac{z^3}{3!}\mathfrak{R}''' + \dots, \end{cases}$$

La transformation ($\mathfrak{L}$) qui associe, d'une manière générale, les points N et N'_1 fera correspondre aux points P, Q, R les points P'_1, Q_1, R'_1, tels qu'on ait

$$\mathbf{M'P'_1} = x\mathfrak{L}', \qquad \mathbf{M'Q'_1} = y\mathfrak{Q}', \qquad \mathbf{M'R'_1} = z\mathfrak{R}'.$$

Or le transformé N′ de N par ($\mathfrak{T}$) est défini par une équation

$$(200) \qquad \mathbf{M'N'} = x'\mathfrak{L}' + y'\mathfrak{Q}' + z'\mathfrak{R}',$$

où x', y', z' sont des fonctions de x, y, z développables en séries entières. La partie principale $\mathbf{M'N'_1}$ de $\mathbf{M'N'}$ s'obtient en réduisant ces séries à leurs termes du premier degré : la loi de correspondance de N et de N'_1 est donc linéaire, et, en vertu des hypothèses précédentes, nous aurons simultanément

$$\mathbf{MN} = x\mathfrak{L} + y\mathfrak{Q} + z\mathfrak{R},$$

et

$$\mathbf{M'N'_1} = x\mathfrak{L}' + y\mathfrak{Q}' + z\mathfrak{R}'.$$

Donc les développements des coefficients x', y', z' de la formule (200) seront de la forme

$$\begin{aligned} x' &= x + f_2(x, y, z) + \dots, \\ y' &= y + g_2(x, y, z) + \dots, \\ z' &= z + h_2(x, y, z) + \dots, \end{aligned}$$

où les symboles indéterminés des seconds membres désignent des fonctions homogènes de degré égal à leur indice.

La transformation ($\mathfrak{L}$) est donc bien linéaire : on l'appelle *transformation linéaire tangente à la transformation* ($\mathfrak{T}$), pour le couple de points correspondants M, M′. Elle joue le même rôle, dans l'étude locale de la transformation ($\mathfrak{T}$), que le plan tangent, dans l'étude locale d'une surface. Nous dirons que deux transformations ($\mathfrak{T}$) et (Θ) qui admettent un couple commun M, M′ sont tangentes en ce couple si, pour ce couple, il y a communauté de la transformation linéaire tangente à chacune d'elles. Soit S une surface quelconque qui passe en M, et qui admet en ce point un plan tangent bien déterminé. Les surfaces S′ et Σ′ qui correspondent respectivement à S par ($\mathfrak{T}$) et (Θ) sont tangentes entre elles : c'est là une conséquence immédiate de ce qui précède; le lecteur l'établira fort aisément.

Bornons-nous également à signaler le fait suivant : si l'on compose deux transformations, on obtiendra la transformation linéaire tangente à la transformation résul-

tante pour le couple (M, M″), en composant les transformations linéaires tangentes aux transformations composantes, pour les couples (M, M′) et (M′, M″) respectivement.

157. Rapport d'un volume infiniment petit à son transformé : jacobien. — Nous avons mis en évidence, dans la première partie de ces *Leçons*, le caractère purement linéaire de la notion de volume, qui a été définie pour un parallélépipède. Il n'y a pas lieu de rappeler ici comment on étend cette notion au cas d'un domaine limité par une surface quelconque. Cette extension fait l'objet d'une étude qui trouve sa place dans les cours de calcul intégral [1]. Cette étude conduit en outre aux résultats suivants, que nous rappellerons pour mieux enchaîner la suite des idées et pour mieux indiquer les notations :

1° Considérons la transformation $(\mathfrak{T})$ du numéro précédent, qui change le point M en un autre point M′, et un volume $\mathfrak{V}$ englobant le point M et infiniment petit dans toutes ses dimensions en un volume $\mathfrak{V}'$ englobant M′ et infiniment petit dans toutes ses dimensions. La transformation linéaire $(\mathfrak{L})$ tangente à $(\mathfrak{T})$ pour le couple M, M′ fait correspondre au volume $\mathfrak{V}$ un autre *volume* $\mathfrak{V}'_1$, *pourvu que le déterminant de cette transformation* $(\mathfrak{L})$ *ne soit pas nul*; moyennant cette condition, il y a correspondance biunivoque entre N à l'intérieur de $\mathfrak{V}$ et N'_1 à l'intérieur de $\mathfrak{V}'_1$ par la transformation $(\mathfrak{L})$; il y a également correspondance biunivoque entre N à l'intérieur de $\mathfrak{V}$ et N′ à l'intérieur de $\mathfrak{V}'$ par la transformation $(\mathfrak{T})$. Enfin, le déterminant de la transformation $(\mathfrak{L})$ représente indifféremment le rapport $\frac{\mathfrak{V}'_1}{\mathfrak{V}}$ ou la limite du rapport $\frac{\mathfrak{V}'}{\mathfrak{V}}$: on dit que ce déterminant est le *jacobien* de la transformation $(\mathfrak{T})$ [2].

Remarquons que la définition même de la transformation linéaire tangente rend intuitive cette dernière proposition, mais qu'au point de vue logique il est nécessaire d'en donner une démonstration rigoureuse, et construite par voie déductive, à partir de la définition abstraite du volume.

2° Supposons que par la transformation $(\mathfrak{T})$ il corresponde biunivoquement à un volume fini $\mathfrak{V}$ un autre volume $\mathfrak{V}'$. Soit F(M) une fonction définie et continue en chaque point M du volume $\mathfrak{V}$: désignons par F′(M′) la fonction qui prend la même valeur en chaque point correspondant du volume $\mathfrak{V}'$, par J(M) le jacobien de la transformation considérée en chaque point M, lequel conservera, dans tout le volume $\mathfrak{V}$, un signe constant. On démontre que l'on a

$$(201) \qquad \int_{\mathfrak{V}'} F'(M')\, d\omega'_{M'} = \int_{\mathfrak{V}} F(M)\,|J(M)|\, d\omega ,$$

où les symboles d'intégration sont relatifs à des sommations étendues aux volumes $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$, et où $d\omega_M$ et $d\omega_{M'}$, signifient respectivement les volumes des éléments englobant le point noté en indice.

Il n'y a là qu'une autre manière d'écrire la formule classique du changement de variables dans une intégrale multiple.

(1) Cf. Édouard Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I.

(2) Jacobien est synonyme de déterminant fonctionnel : cette notion s'est déjà présentée au n° 152.

158. Application des notions précédentes aux transformations infinitésimales. — Considérons la transformation infinitésimale définie par la relation

$$\text{(202)} \qquad \mathrm{MM}' = \mathbf{V}(\mathrm{M})\,dt;$$

la transformation linéaire tangente en chaque point sera elle-même une transformation infinitésimale, et son jacobien sera infiniment voisin de l'unité. Cherchons à exprimer la quantité infiniment petite par laquelle il en diffère. Dans ce but, rapportons tous les points et tous les vecteurs de l'espace à un même système fondamental : appelons x, y, z les coordonnées de M, et x', y', z' celles de M', dans ce système. Nous pourrons substituer à la relation vectorielle (202) les trois égalités ordinaires équivalentes

$$\text{(203)} \qquad \begin{cases} x' - x = u\,dt, \\ y' - y = v\,dt, \\ z' - z = w\,dt, \end{cases}$$

dans lesquelles u, v, w désignent les composantes du vecteur $\mathbf{V}(\mathrm{M})$, qui sont des fonctions connues de x, y, z. La donnée de ces fonctions, ou si l'on préfère celle du champ $\mathbf{V}(\mathrm{M})$, est, nous l'avons dit (et nous le démontrons ici une fois de plus), équivalente à celle de la transformation infinitésimale qui change M en M' (cf. n° 154). Le jacobien J(M) de cette transformation a pour valeur

$$\text{(204)} \qquad \mathrm{J(M)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt & \frac{\partial u}{\partial y}dt & \frac{\partial u}{\partial z}dt \\ \frac{\partial v}{\partial x}dt & 1 + \frac{\partial v}{\partial y}dt & \frac{\partial v}{\partial z}dt \\ \frac{\partial w}{\partial x}dt & \frac{\partial w}{\partial y}dt & 1 + \frac{\partial w}{\partial z}dt \end{vmatrix}.$$

La différence J(M) — 1 est un polynome du troisième degré en dt, qui manque de terme constant, et qui constitue un infiniment petit équivalent à son terme en dt, c'est-à-dire à

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dt.$$

En résumé, il est donc établi, au point de vue de la géométrie linéaire, qu'à tout champ de vecteurs défini par l'équation

$$\mathbf{V}(\mathrm{M}) = u(x, y, z)\mathcal{A} + v(x, y, z)\mathcal{B} + w(x, y, z)\mathcal{C},$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ désignent les vecteurs fondamentaux et où x, y, z représentent les coordonnées du point M, est attachée, d'une manière invariante, la fonction scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Son produit par dt est un infiniment petit équivalent à J(M) — 1, ou encore à

$$\frac{\mathfrak{V}'}{\mathfrak{V}} - 1 = \frac{\mathfrak{V}' - \mathfrak{V}}{\mathfrak{V}},$$

rapport qui exprime précisément la *dilatation cubique* à proximité immédiate de M.

159. Divergence. — En analyse vectorielle linéaire, on consacre la dénomination de *divergence* à l'opération qui consiste à passer du champ vectoriel

$$u(x, y, z), \qquad v(x, y, z), \qquad w(x, y, z)$$

au champ scalaire défini par la relation

$$(205) \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

et l'on pose

$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{div.}\ \mathbf{V}(\mathrm{M}).$$

L'opérateur *divergence* est un opérateur distributif par rapport à l'addition géométrique, ce qui signifie que l'on a

$$\mathrm{div.}[\mathbf{V}(\mathrm{M}) + \mathbf{W}(\mathrm{M})] = \mathrm{div.}\ \mathbf{V}(\mathrm{M}) + \mathrm{div.}\ \mathbf{W}(\mathrm{M}).$$

Au champ $\mathbf{V}(\mathrm{M})$, substituons un champ de la forme $\rho(\mathrm{M})\ \mathbf{V}(\mathrm{M})$, en désignant par $\rho(\mathrm{M})$ une fonction scalaire du point M, et proposons-nous de calculer la divergence de $\rho(\mathrm{M})\ \mathbf{V}(\mathrm{M})$.

La méthode la plus simple consiste à utiliser les notations relatives à un système fondamental particulier. La divergence cherchée s'exprimera ainsi sous la forme

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z},$$

ce qui peut s'écrire

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Le premier terme est le produit du scalaire ρ par la divergence de $\mathbf{V}(\mathrm{M})$. Quant à l'expression

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z},$$

elle n'est autre qu'une forme linéaire du vecteur **V**, dont les coefficients sont $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}$. On l'obtient donc en appliquant au vecteur **V** la forme linéaire constituée par ce que nous avons appelé le gradient linéaire de ρ, ce que nous noterons de la manière suivante

$$\mathrm{gradl}_\rho\,(\mathbf{V}).$$

Nous pouvons donc écrire finalement

$$(206) \qquad \mathrm{div.}\,\rho\mathbf{V} = \rho\ \mathrm{div.}\ \mathbf{V} + \mathrm{gradl}_\rho\,(\mathbf{V}).$$

En géométrie métrique, la formule précédente prend la forme usuelle

$$(207) \qquad \mathrm{div.}\,\rho\mathbf{V} = \rho\ \mathrm{div.}\ \mathbf{V} + \mathbf{V}.\ \mathbf{grad}\,\rho,$$

dans laquelle le second terme du second membre est le produit scalaire de **V** et du gradient (métrique) de ρ.

160. Transformations linéaires infinitésimales au point de vue métrique. — L'opération de composition que nous avons définie au n° 7 pour deux transformations quelconques s'applique en particulier au cas de deux transformations linéaires, finies ou infinitésimales.

On peut d'autre part combiner entre elles des transformations linéaires par voie d'addition géométrique. Soient deux transformations ($\mathfrak{T}'$) et ($\mathfrak{T}''$), qui conservent un même point O (1), et qui font correspondre respectivement à un même point M les points M′ et M″. Soit P le point tel que l'on ait

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OM'} + \mathbf{OM''}.$$

La transformation (S) qui fait passer du point M au point P est une transformation linéaire conservant le point O. On dit que la transformation (S) est la somme géométrique des deux précédentes.

Au point de vue des transformations finies, on obtient des résultats différents, d'une part en composant les transformations ($\mathfrak{T}'$) et ($\mathfrak{T}''$), d'autre part en les additionnant géométriquement. *Au point de vue infinitésimal, il y a identité entre la composition et l'addition géométrique*, en vertu du théorème général établi au n° 155.

Au point de vue fini, toute transformation linéaire faisant correspondre au point M le point M′ peut s'obtenir en *composant* la translation MM′ et une nouvelle transformation linéaire qui conserve le point M′. A une sphère de centre M′ correspondra par cette dernière un ellipsoïde de centre M′; à tout système trirectangle de diamètres de cette sphère correspondra un système de diamètres conjugués de cet ellipsoïde; soit en particulier M′A, M′B, M′C le système de trois rayons, deux à deux orthogonaux de la sphère, qui se transforme dans le système M′A′, M′B′, M′C′ des demi-axes de l'ellipsoïde. Profitons de l'indétermination de sens dont nous disposons pour ces trois derniers vecteurs pour assurer aux trièdres M′ABC et M′A′B′C′ une orientation commune. Notre transformation linéaire (conservant M′) peut s'obtenir en composant la rotation qui superpose le premier de ces trièdres au second, puis une nouvelle transformation linéaire, qui admet M′A, M′B, M′C comme droites invariantes. Au point P tel que l'on ait

$$\mathbf{M'P} = x\mathbf{M'A} + y\mathbf{M'B} + z\mathbf{M'C}$$

correspond par cette transformation le point P′ tel que l'on ait

$$\mathbf{M'P'} = x\mathbf{M'A'} + y\mathbf{M'B'} + z\mathbf{M'C'} = \alpha x\mathbf{M'A} + \beta y\mathbf{M'B} + \gamma z\mathbf{M'C}.$$

Cette dernière transformation est autométrique, puisqu'elle s'obtient en substituant au point P de coordonnées rectangulaires x, y, z le point P′ de coordonnées rectangulaires αx, βy, γz (cf. n° 91). Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Toute transformation linéaire finie s'obtient en composant une translation, une rotation et une transformation autométrique (dans l'ordre ci-dessus).

(1) On peut supprimer cette restriction en raisonnant sur des transformations linéaires de vecteur libre à vecteur libre, c'est-à-dire définies ponctuellement à une translation près.

Après cette digression, revenons maintenant aux transformations linéaires infinitésimales, qui sont notre but actuel. On peut appliquer à ces transformations le théorème précédent, ce qui nous conduit à l'énoncé que voici :

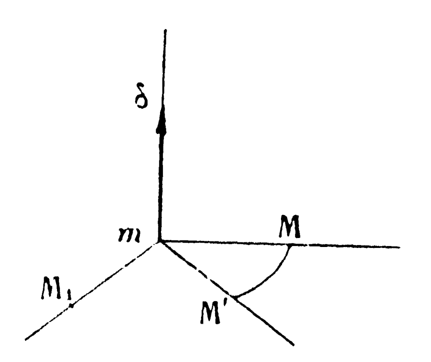
Toute transformation linéaire infinitésimale s'obtient en composant une translation, une rotation, et une transformation autométrique infiniment petites. Seulement ici, en vertu d'une remarque déjà faite, cette composition peut s'opérer par voie d'addition géométrique et, par suite, dans un ordre absolument quelconque.

Il nous reste à indiquer comment sera déterminée chacune de ces transformations partielles. En ce qui concerne la translation, il n'y a rien à changer; on donnera le vecteur infiniment petit qui lui est propre. De même, pour la transformation autométrique, on fera connaître les directions principales et les coefficients dont elles sont douées, ou mieux les quantités infiniment petites dont ces coefficients diffèrent de l'unité.

Il nous reste à définir la rotation, et il importe à cet égard d'indiquer un résultat essentiel; il fait l'objet du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le champ vectoriel qui correspond à une rotation infinitésimale, d'après le mode défini au* n° 154, *est celui des moments, aux divers points de l'espace, d'un vecteur unique porté par l'axe de cette rotation.*

Considérons d'abord une rotation finie, d'un angle t, autour d'un axe Δ, défini en direction et sens par son vecteur unité δ. Appelons M un point quelconque, m sa projection orthogonale sur l'axe, et M' le transformé de M après la rotation. Le sens positif des rotations autour de Δ est celui de mM vers $m\mathrm{M}_1$, en posant



$$\mathbf{mM}_1 = \delta \wedge m\mathbf{M}.$$

Cela posé, nous aurons évidemment

$$\mathbf{mM}' = \mathbf{mM} \cos t + \mathbf{mM}_1 \sin t.$$

Une rotation finie est donc déterminée par l'équation

(208) $$\mathbf{MM}' = - m\mathbf{M}(1 - \cos t) + \delta \wedge \mathbf{mM} \sin t;$$

le second membre est une fonction du vecteur **mM** d'une part, et de la variable t d'autre part, et pour passer à la rotation infiniment petite, il nous suffit de substituer à ce second membre sa différentielle pour $t = 0$, ce qui nous donne

(209) $$\mathbf{MM}'^0 = (\delta \wedge \mathbf{mM})dt.$$

Étant donné le choix spécial fait ici pour le paramètre t, nous sommes donc conduits, pour réaliser une rotation infinitésimale, à construire en chaque point M de l'espace le moment du vecteur unité de son axe et à en déduire le déplacement infiniment petit MM'^0 subi par le point M en multipliant ce vecteur par l'angle infiniment petit dt.

Au point de vue cinématique, cela revient à dire que si un corps solide est animé autour de Δ d'une rotation dont la vitesse angulaire est égale à l'unité, la vitesse d'un point M dans ce mouvement est le moment par rapport à ce point du vecteur

unité porté par l'axe. D'une manière générale, on obtiendra la vitesse du point M, dans un mouvement de rotation quelconque autour de Δ, en prenant le moment par rapport à M du vecteur $\omega\delta$ de Δ, en appelant ω la valeur algébrique de la vitesse angulaire.

Ce théorème est la source commune de toutes les propositions qui constituent la cinématique du corps solide. Sans prétendre exposer ici cette importante question, faisons quelques remarques qui seront essentielles pour la suite.

Au n° 66, nous avons distingué, sous le nom de transformations métriques, celles qui conservent les distances et par suite tous les éléments métriques. Il y a lieu de subdiviser à leur tour les transformations métriques en deux catégories :

1° celles dont le déterminant est $+1$ (déplacements) ;

2° celles dont le déterminant est -1 (déplacements accompagnés d'une symétrie).

Toute transformation linéaire infinitésimale ayant son déterminant infiniment voisin de l'unité, il va sans dire qu'une transformation métrique infinitésimale a nécessairement un déterminant égal à $+1$. Ainsi donc :

Les transformations métriques infinitésimales sont des déplacements.

Conformément au théorème général qui vient d'être établi pour les transformations linéaires finies, tout déplacement peut s'obtenir en composant une translation suivie d'une rotation. La même règle s'applique donc aux déplacements infinitésimaux, avec la possibilité d'opérer ici la composition par voie d'addition géométrique. Il en résulte immédiatement le théorème suivant :

Le champ vectoriel qui correspond à un déplacement infinitésimal (suivant le mode du n° 154) *est celui des moments résultants, aux divers points de l'espace, d'un système de vecteurs glissants.*

Le vecteur du champ s'obtient en effet en composant par addition géométrique le vecteur correspondant à la translation (vitesse de translation) et le vecteur correspondant à la rotation (vitesse de rotation), c'est-à-dire en faisant la somme géométrique d'un vecteur de grandeur constante et du moment d'un vecteur fixe (porté par l'axe de rotation) : d'après la relation (91), c'est bien là le mode de génération propre au champ des moments résultants d'un système quelconque de vecteurs glissants.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces questions, et nous déduirons des notions acquises précédemment un nouvel élément différentiel, de nature vectorielle, lié à un champ de vecteurs, en chaque point de ce champ, d'une manière invariante. On a proposé pour cet élément les noms de curl, de tourbillon et de rotationnel. Nous adopterons ici cette dernière dénomination.

161. Déformation pure. Rotationnel. — Considérons un champ de vecteurs en géométrie métrique, ou, ce qui revient au même, d'après la remarque générale du n° 154, la transformation infinitésimale correspondante. En chaque point du champ, associons à celle-ci la transformation linéaire tangente : cette dernière résulte d'une translation, d'une rotation, et d'une transformation autométrique infiniment petites. Tous les éléments caractéristiques de ces transformations seront

autant d'éléments invariants, attachés en chaque point au champ de vecteurs étudié.

Pour plus de clarté, revenons au point de vue cinématique. Chaque vecteur du champ nous représente la vitesse d'une particule fluide, à l'instant considéré. Cette vitesse, c'est précisément celle de notre translation infiniment petite, qui ne fournit par suite aucun élément nouveau. Par contre, d'après un théorème précédent, les vitesses qui proviennent de la rotation infiniment petite peuvent se déduire d'un vecteur porté par son axe et proportionnel à sa vitesse angulaire. C'est ce vecteur, muni d'un coefficient de proportionnalité opportun, qui constitue le rotationnel.

Supposons tous les points et tous les vecteurs rapportés à un même système fondamental, orthogonal et normal; soient u, v, w les composantes du vecteur du champ au point x, y, z. La transformation infinitésimale qui correspond à ce champ est définie par les équations

$$(210) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' - x &= u\,dt, \\ y' - y &= v\,dt, \\ z' - z &= w\,dt. \end{aligned} \right.$$

Elle transforme le point $N(x+h, y+k, z+l)$ en un point N' de coordonnées

$$\begin{aligned} &x + h + u(x+h, y+k, z+l)\,dt, \\ &y + k + v(x+h, y+k, z+l)\,dt, \\ &z + l + w(x+h, y+k, z+l)\,dt. \end{aligned}$$

Les composantes du vecteur $M'N'$ sont donc

$$\begin{aligned} h' &= h + [u(x+h, y+k, z+l) - u(x, y, z)]\,dt, \\ k' &= k + [v(x+h, y+k, z+l) - v(x, y, z)]\,dt, \\ l' &= l + [w(x+h, y+k, z+l) - w(x, y, z)]\,dt, \end{aligned}$$

et celles de sa partie principale sont

$$\begin{aligned} &h\left[1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right] + k\frac{\partial u}{\partial y}dt + l\frac{\partial u}{\partial z}dt, \\ &h\frac{\partial v}{\partial x}dt + k\left[1 + \frac{\partial v}{\partial y}dt\right] + l\frac{\partial v}{\partial z}dt, \\ &h\frac{\partial w}{\partial x}dt + k\frac{\partial w}{\partial y}dt + l\left[1 + \frac{\partial w}{\partial z}dt\right]. \end{aligned}$$

D'après la définition donnée au n° 156, la transformation linéaire tangente sera donc définie par les équations

$$(211) \qquad \left\{ \begin{aligned} h'_1 &= h\left[1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right] + k\frac{\partial u}{\partial y}dt + l\frac{\partial u}{\partial z}dt, \\ k'_1 &= h\frac{\partial v}{\partial x}dt + k\left[1 + \frac{\partial v}{\partial y}dt\right] + l\frac{\partial v}{\partial z}dt, \\ l'_1 &= h\frac{\partial w}{\partial x}dt + k\frac{\partial w}{\partial y}dt + l\left[1 + \frac{\partial w}{\partial z}dt\right]. \end{aligned} \right.$$

Utilisons ici une remarque générale :

Toute transformation linéaire est la somme géométrique d'une transformation autométrique, et d'une transformation dégénérée du type planaire, qui fait correspondre à tout vecteur son produit géométrique par un vecteur fixe.

Soit en effet une transformation linéaire (de vecteur à vecteur), qui fait correspondre au vecteur **V** le vecteur **V'**. Donner cette transformation équivaut, nous l'avons remarqué, à donner la forme bilinéaire

$$\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) = \mathbf{V}.\mathbf{V}'_1.$$

Cela posé, nous pourrons toujours écrire

$$\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) = \frac{\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) + \chi(\mathbf{V}_1, \mathbf{V})}{2} + \frac{\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) - \chi(\mathbf{V}_1, \mathbf{V})}{2}. \tag{212}$$

Nous décomposons ainsi la forme bilinéaire $\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1)$ en une somme de deux autres formes, l'une symétrique, à laquelle correspond une transformation autométrique, et l'autre alternée : à cette dernière correspondra une transformation changeant tout vecteur **V** en un vecteur **V''**, tel que le produit scalaire $\mathbf{V}.\mathbf{V}''_1$ soit une fonction alternée de **V** et de $\mathbf{V}_1$, d'expression

$$\mathbf{V}.\mathbf{V}''_1 = \frac{\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) - \chi(\mathbf{V}_1, \mathbf{V})}{2}.$$

Or, tout volume tel que $(\mathbf{A}, \mathbf{V}, \mathbf{V}_1)$ où **A** désigne un vecteur fixe, constitue une fonction bilinéaire alternée de **V** et de $\mathbf{V}_1$. Réciproquement, toute forme bilinéaire alternée de **V** et de $\mathbf{V}_1$ a pour expression $(\mathbf{A}, \mathbf{V}, \mathbf{V}_1)$, pour l'unique raison que ce dernier symbole présente le même degré de généralité qu'une telle forme : il renferme bien, comme elle, trois coefficients scalaires arbitraires. Nous pouvons donc écrire

$$\mathbf{V}.\mathbf{V}''_1 = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, \mathbf{V}_1),$$

relation qui, d'après la définition (75) du produit géométrique, nous montre que

$$\mathbf{V}''_1 = \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{A}. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Appliquons cette remarque à la transformation définie par les formules (211). En vertu de la symétrie du tableau des coefficients d'une correspondance autométrique (par rapport à sa diagonale), nous sommes amenés à écrire ces formules de la manière suivante :

$$(213)\quad \left\{\begin{aligned}
h'_1 &= h\left[1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right] + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dt}{2} + l\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{dt}{2} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)l - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)k\right]\frac{dt}{2},\\
k'_1 &= h\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dt}{2} + k\left[1 + \frac{\partial v}{\partial y}dt\right] + l\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{dt}{2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)h - \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)l\right]\frac{dt}{2},\\
l'_1 &= h\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{dt}{2} + k\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{dt}{2} + l\left[1 + \frac{\partial w}{\partial z}dt\right] + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)k - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)h\right]\frac{dt}{2}.
\end{aligned}\right.$$

D'une part, nous mettons ainsi en évidence une transformation autométrique invariante, dérivant de la forme quadratique

$$(214)\quad \begin{aligned}
&h^2\left[1 + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right] + k^2\left[1 + \frac{\partial v}{\partial y}dt\right] + l^2\left[1 + \frac{\partial w}{\partial z}dt\right]\\
&+ kl\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right]dt + lh\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right]dt + hk\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dt,
\end{aligned}$$

et qui représente, au point de vue local, les effets proprement dits de déformation, dégagés de tout déplacement. D'autre part, nous faisons apparaître le produit vectoriel du vecteur

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)dt, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)dt, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dt,$$

par le vecteur h, k, l.

En résumé, la transformation linéaire tangente en un point à une transformation infinitésimale donnée est réductible à la somme géométrique :

1° d'une transformation autométrique, qui n'est autre que la *déformation pure* (c'est-à-dire dégagée de tout déplacement);

2° d'une transformation alternée, qui, en vertu du théorème sur les rotations infiniment petites, est justement une rotation infinitésimale, dont la vitesse angulaire a pour composantes

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Notre but est donc atteint.

Conformément à l'usage, et pour la simplicité des formules ultérieures, nous appellerons *rotationnel* le double de cette vitesse angulaire de rotation. En coordonnées orthogonales et normales, nous devrons donc écrire, d'après les notations précédentes,

$$\mathbf{V} = u\mathcal{A} + v\mathcal{B} + w\mathcal{C},$$

et

$$(215) \qquad \mathbf{rot\,V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathcal{A} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathcal{B} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathcal{C}.$$

REMARQUE. — Dans le calcul précédent, nous n'avons pas craint de revenir aux notations cartésiennes. C'est ce qu'il est avantageux de faire en beaucoup de cas (voir l'exemple déjà cité, au n° 147). Toutefois, dans ce qui précède, nous n'avons jamais perdu de vue le sens intrinsèque des opérations que nous avons effectuées, et en renonçant aux notations condensées, nous avons conservé l'esprit même du calcul vectoriel. On voit par là que la géométrie analytique et les méthodes vectorielles, loin de s'exclure mutuellement, s'apportent souvent une aide très appréciable.

162. Forme intrinsèque de la définition du rotationnel. — Il est d'ailleurs facile de présenter les résultats précédents sous forme purement intrinsèque. La transformation linéaire tangente à la transformation infinitésimale du champ est donnée par les équations (211) : elle fait correspondre au vecteur δM, qui représente un déplacement infinitésimal quelconque de M, le vecteur $\delta M + \delta \mathbf{V} dt$, en appelant $\delta \mathbf{V}$ la différentielle géométrique du vecteur du champ, pour ce déplacement. Or les résultats de l'analyse précédente peuvent se résumer ainsi : le vecteur $\delta M + \delta \mathbf{V} dt$

est la somme géométrique de deux autres : l'un qui correspond à δM par une transformation autométrique, l'autre qui est de la forme

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{rot\,V} \wedge \delta M\,dt.$$

Nous sommes donc conduits à cette définition du rotationnel :

C'est un vecteur tel que la transformation linéaire qui fait passer du vecteur δM au vecteur

$$\delta M + \left(\delta \mathbf{V} - \frac{1}{2}\,\mathbf{rot\,V} \wedge \delta \mathbf{M}\right)dt$$

soit une transformation autométrique [1] ; ou plus simplement :

C'est un vecteur tel que la transformation linéaire qui fait passer du vecteur δM *au vecteur*

$$\delta \mathbf{V} - \frac{1}{2}\,\mathbf{rot\,V} \wedge \delta \mathbf{M},$$

soit autométrique.

L'équivalence de ces deux définitions est évidente, car de l'une de ces transformations, on déduit l'autre en la composant avec une homothétie de rapport dt, puis en sommant géométriquement la transformation ainsi obtenue et la transformation unité.

A cet ordre d'idées, on rattache aisément la définition du rotationnel proposée par MM. Marcolongo et Burali-Forti [2]. Soient deux déplacements $\delta_1 M$ et $\delta_2 M$, appelons $\delta_1 \mathbf{V}$ et $\delta_2 \mathbf{V}$ les différentielles géométriques correspondantes. D'après la définition des transformations autométriques, nous aurons une égalité de deux produits scalaires, à savoir

$$\delta_1 M . \left(\delta_2 \mathbf{V} - \frac{1}{2}\,\mathbf{rot\,V} \wedge \delta_2 M\right) = \delta_2 M . \left(\delta_1 \mathbf{V} - \frac{1}{2}\,\mathbf{rot\,V} \wedge \delta_1 M\right).$$

ce qui peut s'écrire

$$\delta_1 M . \delta_2 \mathbf{V} - \delta_2 M . \delta_1 \mathbf{V} = \frac{1}{2}\delta_1 M . (\mathbf{rot\,V} \wedge \delta_2 M) - \frac{1}{2}\delta_2 M . (\mathbf{rot\,V} \wedge \delta_1 M).$$

ou, d'après l'égalité de définition du produit géométrique,

$$\delta_1 M . \delta_2 \mathbf{V} - \delta_2 M . \delta_1 \mathbf{V} = \frac{1}{2}(\delta_1 M,\ \mathbf{rot\,V},\ \delta_2 M) - \frac{1}{2}(\delta_2 M,\ \mathbf{rot\,V},\ \delta_1 M).$$

ou finalement

$$(216)\qquad \delta_1 M . \delta_2 \mathbf{V} - \delta_2 M . \delta_1 \mathbf{V} = (\delta_1 M,\ \mathbf{rot\,V},\ \delta_2 M).$$

Cette relation constitue une sorte de définition intrinsèque et implicite du rotationnel.

163. Propriétés du rotationnel. — Les calculs du n° 161 établissent que le rotationnel est distributif par rapport à l'addition géométrique, c'est-à-dire que l'on a

$$(217)\qquad \mathbf{rot}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \mathbf{rot\,U} + \mathbf{rot\,V}.$$

(1) Cette transformation est précisément celle qui dérive de la forme quadratique (214).
(2) *Éléments de calcul vectoriel*, chapitre VI, n° 3 (traduction française par Lattès).

Imitant ce que nous avons fait pour la divergence, cherchons l'effet de la substitution au champ **V**(M) d'un champ ρ**V**, en désignant par ρ une fonction scalaire du point M. Pour calculer **rot** ρ**V**, la méthode la plus simple est celle qui consiste à passer aux composantes. Ce seront respectivement

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho w) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v), \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho w), \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho u).$$

En effectuant les dérivations, on aperçoit immédiatement la présence de deux vecteurs partiels, dont l'un est le produit de ρ par le rotationnel de **V**, et dont l'autre est le produit vectoriel du gradient de ρ et du vecteur **V** ; on a donc

$$\text{(218)} \qquad \mathbf{rot}\,\rho\mathbf{V} = \rho\,\mathbf{rot}\,\mathbf{V} + \mathbf{grad}\,\rho \wedge \mathbf{V},$$

formule qui pourrait également s'établir en recourant à la relation (216).

Vérifions également la relation

$$\text{(219)} \qquad \operatorname{div}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{V}.\mathbf{rot}\,\mathbf{U} - \mathbf{U}.\mathbf{rot}\,\mathbf{V}.$$

Comme nous avons deux vecteurs en présence, il est indiqué, pour plus de clarté, de représenter par U_x, U_y, U_z les composantes de U, par V_x, V_y, V_z celles de V. Le premier membre de la formule à démontrer peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}(U_y V_z - U_z V_y) + \frac{\partial}{\partial y}(U_z V_x - U_x V_z) + \frac{\partial}{\partial z}(U_x V_y - U_y V_x).$$

La dérivation donne deux groupes de termes, les uns qui ne contiennent pas les dérivées de V_x, V_y, V_z, les autres qui ne contiennent pas de U_x, U_y, U_z. Chacun de ces groupes se ramène facilement à un terme du second membre, ce qui vérifie la formule annoncée.

En résumé, pour combiner des opérations vectorielles, finies ou infinitésimales, il y aura souvent intérêt à revenir aux composantes, à effectuer le calcul par les méthodes ordinaires, puis à mettre, sous une forme intrinsèque, aussi simple que possible, le résultat ainsi obtenu.

164. Rapprochement entre la théorie des champs scalaires et la théorie des champs vectoriels. — Nous avons rattaché les éléments différentiels du premier ordre des champs de vecteurs à la notion des transformations infinitésimales. Une telle manière de faire est conforme au développement historique de la théorie. Toutefois, il importe de remarquer qu'il est possible d'obtenir les résultats précédents en généralisant purement et simplement le point de vue que nous avons adopté plus haut, dans l'étude de la différentielle première d'une fonction de point. Nous allons donc indiquer brièvement les idées communes à l'étude infinitésimale, restreinte au premier ordre, des champs scalaires d'une part, et des champs vectoriels de l'autre. Ce rapprochement nous sera d'ailleurs, par la suite, utile à d'autres égards. Pour simplifier, nous nous limiterons au domaine métrique.

Pour marquer la communauté d'origine des deux théories, faisons appel à la notion de dérivée en un point M, suivant une demi-droite MΔ, dont le vecteur unité est désigné par **u**.

Soit tout d'abord le champ scalaire F(M). Nous avons vu [formule (165)] que sa dérivée en M suivant MΔ est égale au produit scalaire

$$\mathrm{grad}\,F(M).\mathbf{u},$$

ou encore à

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{220}$$

en appelant x, y, z les coordonnées de M dans un système orthogonal et normal **A**, **B**, **C**, $f(x, y, z)$ l'expression de F(M) dans ce système, et α, β, γ les composantes de **u** (cosinus directeurs de MΔ). Du gradient de F au point M, on déduit donc, dans ce cas, les dérivées de F en M dans toutes les directions.

Soit maintenant un champ vectoriel **V**(M). Au lieu d'étudier, comme précédemment, la transformation infinitésimale correspondante par l'intermédiaire de la transformation linéaire tangente, c'est-à-dire au lieu d'envisager la correspondance θ entre les vecteurs

$$\delta M \qquad \text{et} \qquad \delta M + \delta \mathbf{V}\,dt,$$

on peut considérer plus simplement la transformation Θ qui fait passer de

$$\delta M \qquad \text{à} \qquad \delta \mathbf{V}.$$

La correspondance θ n'est d'ailleurs que la somme géométrique (n° 160) de la transformation identique et d'une transformation Θ', qui est le produit de Θ par une homothétie de rapport dt. On peut donc étudier indifféremment θ ou Θ. Or l'étude de Θ nous amène à l'unification de point de vue que nous cherchons à établir, entre champs scalaires et champs vectoriels.

La transformation Θ fait correspondre au vecteur δM le vecteur $\delta\mathbf{V}$; elle fait donc correspondre au vecteur

$$\mathbf{u}=\frac{\delta M}{|\delta M|} \qquad \text{ou} \qquad |\delta M| = \text{long}.\,\delta M,$$

le vecteur

$$\frac{\delta \mathbf{V}}{|\delta M|},$$

c'est-à-dire la dérivée géométrique du vecteur **V** du champ en M et suivant MΔ.

Nous pouvons donc énoncer la conclusion suivante :

La dérivée en un point M *d'un champ, suivant une demi-droite arbitraire* MΔ, *sera :*

1° *un scalaire, qui se déduit du gradient*, soit grad F. **u**, *pour un champ scalaire ;*

2° *un vecteur, qui est le transformé de* **u** *dans la correspondance linéaire* (δM, δ**V**), *s'il s'agit d'un champ vectoriel.*

Pour un champ scalaire, c'est le gradient qui synthétise en chaque point tous les éléments différentiels invariants du premier ordre. Pour un champ vectoriel, les éléments analogues sont synthétisés non plus par un simple vecteur mais par un être

géométrique invariant de nature plus complexe, par la transformation linéaire Θ. La divergence et le rotationnel sont des éléments liés d'une manière intrinsèque à cette transformation, mais dont la donnée, même simultanée, est beaucoup moins complète que celle de la transformation Θ.

Le rotationnel est toujours défini par cette condition que la correspondance entre

$$\delta M \qquad \text{et} \qquad \delta \mathbf{V} - \frac{1}{2}\delta M \wedge \operatorname{rot} \mathbf{V},$$

soit autométrique. Dans les formules qui expriment cette correspondance Θ_1, les coefficients des termes en diagonale principale sont les mêmes que pour la correspondance Θ. D'après la théorie de l'équation en s, leur somme est un invariant : cet invariant est précisément la divergence. Pour déterminer la transformation Θ, il faut donner ses neuf coefficients; si l'on donnait seulement le rotationnel et la divergence, cela ferait quatre conditions, et il subsisterait une indétermination d'ordre 5.

Faisons encore la remarque suivante : pour définir analytiquement la transformation Θ, il suffit de donner les transformés des vecteurs fondamentaux $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, c'est-à-dire précisément les dérivées géométriques du vecteur $\mathbf{V}$, prises à partir du point M, parallèlement aux axes de coordonnées. Soient $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$ ces dérivées. La transformation Θ fera correspondre à tout vecteur

$$a\mathcal{A} + b\mathcal{B} + c\mathcal{C}$$

le vecteur

$$a\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}.$$

Ceci nous amène à conclure que *l'opérateur*

$$(221) \qquad a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z},$$

applicable tant aux scalaires qu'aux vecteurs, est doué d'un caractère d'invariance vis-à-vis des transformations de coordonnées rectangulaires.

Des propriétés de cette nature méritent d'être retenues : elles conduisent à des simplifications des calculs, dès qu'on a étudié les modes de composition de l'opérateur qu'elles définissent avec d'autres opérateurs. Nous allons donner, à ce sujet, quelques explications.

165. La notion d'opérateur. — Nous touchons ici à une notion qui, par sa grande généralité, englobe tous les modes de calcul imaginables. Un opérateur, c'est l'indication de la transformation à effectuer pour passer d'un objet à un autre objet d'un ensemble déterminé. Particularisons cette définition en vue de nos buts actuels : considérons un ensemble qui pourra comprendre des scalaires, des vecteurs des diverses catégories, des doublets, des fonctions algébriques invariantes d'un certain nombre de vecteurs et de doublets, des transformations ponctuelles, des champs scalaires ou vectoriels, etc.... Entre ces êtres si variés, imaginons des modes

de passage, susceptibles eux-mêmes d'une large part d'arbitraire. Chacun de ces modes pourra être conçu comme le résultat de l'application à l'élément initial, d'un opérateur convenablement choisi.

Pratiquement, les seuls opérateurs intéressants sont ceux qui se prêtent mutuellement à des lois de composition simples. Passons en revue quelques-uns des opérateurs que nous avons eu l'occasion de considérer jusqu'à présent. Ce sont :

1° Les opérateurs de l'algèbre ordinaire et de l'analyse ordinaire : les premiers correspondent aux opérations du calcul algébrique, les autres ont pour source commune l'intervention d'un passage à la limite. Dans ce champ restreint, les seuls éléments de calcul sont les nombres et les fonctions [1]. Une fonction peut, à ce point de vue, être regardée comme un opérateur, permettant de faire correspondre à tout nombre un autre nombre. D'autres opérateurs font correspondre à toute fonction (moyennant certaines restrictions) une autre fonction : tels sont ceux qui expriment le passage d'une fonction à ses dérivées successives. Citons aussi les opérateurs qui font correspondre à chaque fonction un nombre, à la manière des intégrales définies. Une telle énumération est très incomplète et donne seulement un aperçu de la richesse de ce sujet, qui pourrait, à lui seul, fournir la matière de plusieurs volumes importants.

2° Les opérateurs de *l'algèbre vectorielle*, qui correspondent aux modes de composition des scalaires et des vecteurs que nous avons étudiés dans les deux premières parties de ces leçons. Soient par exemple, en coordonnées orthogonales et normales, deux vecteurs, de composantes X_0, Y_0, Z_0 et X, Y, Z. L'expression scalaire invariante

$$XX_0 + YY_0 + ZZ_0$$

est le résultat provenant de l'application de l'opérateur *produit scalaire* à ces deux vecteurs. Voilà un opérateur qui de deux vecteurs libres amène à un nombre. On pourrait citer d'autres exemples. Remarquons de préférence que dans une même expression on peut apercevoir l'action de différents opérateurs, suivant ce qu'on y regarde comme donné ou comme arbitraire. Ainsi, en parlant de l'opérateur produit scalaire, il est bien entendu que nous le faisons porter sur deux vecteurs arbitraires. Si l'un de ces vecteurs, tel (X_0, Y_0, Z_0), était regardé comme donné, la formation de l'expression $XX_0 + YY_0 + ZZ_0$ serait l'effet d'un nouvel opérateur, à savoir

produit scalaire par V_0.

Notons également que les transformations linéaires sont des opérateurs qui font passer de vecteur à vecteur. La propriété fondamentale de ces opérateurs est la distributivité par rapport à l'addition géométrique.

3° Les opérateurs de *l'analyse vectorielle*, dont la dérivation géométrique et les éléments différentiels invariants rencontrés dans l'étude des champs scalaires ou vectoriels nous fournissent autant d'exemples : à côté du gradient, de la divergence, et

(1) Il y aurait lieu cependant d'y ajouter les fonctionnelles, qui naissent en particulier de ces opérateurs, cités quelques lignes plus bas, et qui à chaque fonction bien déterminée dans un intervalle (a, b) font correspondre un nombre.

du rotationnel, citons l'opérateur plus complexe constitué par la transformation linéaire Θ, qui a pour effet de faire correspondre les différentielles géométriques δM et δV.

Nous allons nous occuper spécialement de l'opérateur d'Hamilton, dont les modes de composition simples avec les opérations de l'algèbre vectorielle permettent, dans les calculs intrinsèques, l'introduction fréquente et efficace. Pour définir avec précision le champ d'applications de cet opérateur, il nous sera commode d'envisager une classe d'opérateurs plus générale.

166. La classe des opérateurs Ω et l'hamiltonien. — Prenons un champ quelconque, scalaire ou vectoriel, rapporté à un système de coordonnées orthogonales et normales. Considérons un système d'opérateurs Ω_x, Ω_y, Ω_z, astreints à la condition suivante : si a, b, c sont les composantes d'un vecteur quelconque, l'expression

$$a\Omega_x + b\Omega_y + c\Omega_z \tag{222}$$

constitue un opérateur invariant, vis-à-vis des changements de coordonnées (orthogonales et normales). Par rapport à un changement de coordonnées cartésiennes quelconques, les deux systèmes de lettres a, b, c d'une part et Ω_x, Ω_y, Ω_z de l'autre, auraient des variances contraires (n° 79). Mais, comme les coordonnées sont supposées ici orthogonales et normales, ces modes de variance se confondent.

Convenons, pour simplifier, de n'appliquer pour le moment les opérateurs $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ qu'à des fonctions scalaires et faisons en outre cette hypothèse essentielle : ces opérateurs sont distributifs par rapport à l'addition algébrique.

De cette hypothèse et des précédentes, nous allons déduire d'importantes propositions.

THÉORÈME I. — *Soit un champ scalaire ρ (x, y, z). Les quantités*

$$\Omega_x(\rho), \qquad \Omega_y(\rho), \qquad \Omega_z(\rho)$$

sont les composantes d'un vecteur invariant.

La démonstration de ce théorème a été donnée déjà quelques lignes plus haut, lorsque nous avons fait remarquer la communauté de variance de Ω_x, Ω_y, Ω_z et des composantes a, b, c d'un vecteur.

THÉORÈME II. — *Soit un champ vectoriel, dont le vecteur, lié au point x, y, z, a pour composantes* X, Y, Z. *La quantité scalaire*

$$\Omega_x(X) + \Omega_y(Y) + \Omega_z(Z)$$

est un invariant.

En effet, lors d'un changement de coordonnées (orthogonales et normales), X, Y, Z ont un mode déterminé de variance, qui serait aussi celui de $\Omega_x(X)$, $\Omega_y(Y)$, $\Omega_z(Z)$, si les opérateurs Ω_x, Ω_y, Ω_z, tout en restant distributifs par rapport à l'addition, étaient indifférents à un changement de coordonnées. Mais ils subissent en réalité une variance d'un mode contraire à celui de X, Y, Z (bien qu'ici, identique). L'expression proposée reste donc invariante.

On peut remarquer qu'il n'y a aucune espèce de différence entre le raisonnement précédent et celui que l'on emploierait pour établir l'invariance de

$$\Omega_x X + \Omega_y Y + \Omega_z Z$$

si Ω_x, Ω_y, Ω_z désignaient les composantes d'un vecteur, chaque terme devenant un monome. Dans un cas comme dans l'autre, on n'invoque en effet que l'hypothèse de distributivité des Ω par rapport à l'addition.

Théorème III. — *Soit un champ vectoriel, où le vecteur* X, Y, Z *est lié au point* x, y, z. *Les trois expressions*

$$\Omega_y(Z) - \Omega_z(Y), \qquad \Omega_z(X) - \Omega_x(Z), \qquad \Omega_x(Y) - \Omega_y(X)$$

sont les composantes d'un vecteur invariant.

En effet, lors d'un changement de coordonnées, nous pourrons raisonner sur les modes de variance comme précédemment, et remarquer qu'il suffit d'établir le théorème dans le cas particulier où l'on supprime les parenthèses, et où chaque terme de nos expressions devient un monôme, Ω_x, Ω_y, Ω_z désignant alors les composantes d'un vecteur. Nous sommes donc ramenés à établir l'invariance d'un produit géométrique : la démonstration de ce point particulier serait superflue et nous devons regarder le théorème général comme établi.

Nous sommes donc conduits à la conclusion suivante :

Soit Ω *un opérateur* COMPOSÉ, c'est-à-dire *doué*, dans chaque système orthogonal et normal, de *composantes* Ω_x, Ω_y, Ω_z, distributives par rapport à l'addition, et jouissant du même mode de variance (1) que les composantes d'un vecteur. L'opérateur Ω, appliqué à des champs scalaires ou vectoriels pourra conduire à de nouveaux champs scalaires ou vectoriels invariants; c'est ce qu'expriment les théorèmes I, II, III.

Il y a parallélisme entre le théorème I et la multiplication d'un vecteur par un scalaire ρ; entre le théorème II et la multiplication scalaire d'un vecteur par un autre; entre le théorème III et la multiplication vectorielle d'un vecteur par un autre.

Ce parallélisme ne consiste pas en une simple analogie. Sa cause réside dans le fait précis que nous connaissons des opérateurs particuliers satisfaisant à toutes les conditions précédentes, ceux qu'on obtient en posant

$$(223) \qquad \Omega_x(\rho) = l\rho, \qquad \Omega_y(\rho) = m\rho, \qquad \Omega_z(\rho) = n\rho,$$

l, m, n étant des fonctions de x, y, z qui seront les composantes d'un vecteur lié au point x, y, z, c'est-à-dire appartenant à un nouveau champ. En appliquant à ces opérateurs particuliers les théorèmes précédents et leurs conséquences, nous retrouverions tous les théorèmes fondamentaux du calcul vectoriel en géométrie métrique.

Mais nous connaissons aussi un autre opérateur qui satisfait également à ces conditions, celui qui a pour composantes $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$. En effet, nous avons montré au n° 164 qu'en appelant a, b, c les composantes d'un vecteur, le nouvel opérateur

$$a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$$

(1) Grâce à l'identification accidentelle des variances contraires.

a une signification invariante. D'ailleurs, il y a bien distributivité par rapport à l'addition.

Nous représentons avec Hamilton par le symbole ∇ (*nabla*) l'opérateur ainsi obtenu. Nous allons montrer qu'on y attache aisément les notions de *gradient*, de *divergence* et de rotationnel.

167. Gradient, divergence et rotationnel rattachés à l'hamiltonien. — Appliquons les théorèmes I, II, III à l'opérateur ∇. En prenant d'abord un champ scalaire ρ et en formant $\nabla\rho$, nous obtenons un champ vectoriel invariant, ayant pour composantes

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Donc

$$\nabla\rho = \mathbf{grad}\,\rho. \tag{224}$$

Pour faciliter le langage, il est commode de dire que ∇ est un *vecteur symbolique* (ou fictif) et qu'on en fait le produit (symbolique) par le scalaire ρ. On obtient ainsi le gradient.

Prenons maintenant un champ vectoriel **V**. Le produit scalaire symbolique $\nabla\mathbf{V}$ a pour expression

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Donc

$$\nabla . \mathbf{V} = \operatorname{div} \mathbf{V}. \tag{225}$$

Enfin, le produit vectoriel symbolique

$$\nabla \wedge \mathbf{V}$$

a pour composantes

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

et l'on a

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V}. \tag{226}$$

En vertu de la théorie générale des opérateurs Ω, nous avons donc aussi une nouvelle démonstration de l'invariance du gradient, de la divergence et du rotationnel.

168. Itération d'un opérateur Ω à composantes permutables. — Les deux types d'opérateurs Ω dont nous poursuivons l'application ont respectivement pour composantes

$$\Omega_x(\rho) = l\rho, \qquad \Omega_y(\rho) = m\rho, \qquad \Omega_z(\rho) = n\rho,$$

$$\nabla_x(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial x}, \qquad \nabla_y(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial y}, \qquad \nabla_z(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Ces composantes, lors de l'itération d'un opérateur bien déterminé, sont permutables, c'est-à-dire que l'on a pour les deux types d'opérateurs précédents

$$\Omega_y[\Omega_z(\rho)] = \Omega_z[\Omega_y(\rho)] \tag{227}$$

et deux égalités analogues.

Cette remarque posée, étudions les invariants les plus remarquables auxquels donne naissance l'itération d'un opérateur Ω.

Partons d'un champ scalaire ρ ; multiplions symboliquement le vecteur (réel ou fictif) Ω par ρ, puis faisons le produit scalaire symbolique de Ω par le vecteur obtenu. Nous obtiendrons un nouveau champ scalaire invariant

$$\Omega_x[\Omega_x(\rho)] + \Omega_y[\Omega_y(\rho)] + \Omega_z[\Omega_z(\rho)],$$

qu'on peut considérer comme le résultat de l'application au scalaire ρ de l'opérateur

$$\Omega^2 = \Omega . \Omega = \Omega_x\Omega_x + \Omega_y\Omega_y + \Omega_z\Omega_z .$$

En appliquant cette remarque aux deux types spéciaux d'opérateurs déjà considérés, nous déduirons du champ scalaire ρ deux nouveaux champs invariants

$$(l^2 + m^2 + n^2)\rho,$$

et

$$\nabla^2\rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \operatorname{div} \nabla \rho = \operatorname{div} \mathbf{grad}\, \rho. \tag{228}$$

Nous rattachons ainsi le laplacien, déjà rencontré (n° 153), à une itération de l'hamiltonien.

Dans ceci, nous n'avons pas fait appel à la permutabilité. Voici par contre où nous allons la voir intervenir.

Cherchons le produit vectoriel symbolique d'un opérateur Ω par lui-même, sachant que ses composantes sont permutables. Nous allons montrer que ce produit est nul.

En effet, du vecteur

$$X = \Omega_x(\rho), \qquad Y = \Omega_y(\rho), \qquad Z = \Omega_z(\rho),$$

nous passons au vecteur

$$\Omega_y(Z) - \Omega_z(Y), \qquad \Omega_z(X) - \Omega_x(Z), \qquad \Omega_x(Y) - \Omega_y(X),$$

dont les composantes sont nulles, en vertu des trois relations (227).

Cette proposition est la source commune des deux suivantes :

1° L'annulation du produit vectoriel d'un vecteur par un vecteur colinéaire.

2° L'annulation du rotationnel de tout gradient, traduite par

$$\mathbf{rot\ grad}\, \rho = 0. \tag{229}$$

L'analogie du symbole ∇ avec les vecteurs se poursuit donc au point de permettre d'écrire

$$\nabla \wedge \nabla = 0.$$

Voici encore une autre application du même genre. Faisons le produit scalaire symbolique d'un opérateur Ω par le vecteur résultant du produit vectoriel symbolique de Ω par un vecteur $\mathbf{V}$; soit donc

$$\Omega . \Omega \wedge \mathbf{V}.$$

Le résultat est encore zéro, car en développant, on obtient

$$\Omega_x[\Omega_y(Z) - \Omega_z(Y)] + \Omega_y[\Omega_z(X) - \Omega_x(Z)] + \Omega_z[\Omega_x(Y) - \Omega_y(X)],$$

ce qui s'évanouit en vertu de la permutabilité.

Ce résultat est encore la source commune de deux propositions :

1° Le produit scalaire de **U** et de **U** $\wedge$ **V** est nul;

2° L'on a identiquement

(230) $$\text{div. } \mathbf{rot}\, \mathbf{V} = 0,$$

ou, sous forme symbolique,

$$\nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{V} = 0.$$

169. Applications diverses. — Prenons dans la classe précédemment définie deux opérateurs Ω et Ω', répondant aux hypothèses suivantes :

1° Les composantes Ω_x, Ω_y, Ω_z sont permutables entre elles;

2° Les composantes Ω'_x, Ω'_y, Ω'_z sont permutables entre elles;

3° Chaque composante de Ω est permutable avec chaque composante de Ω'.

On obtient un exemple répondant à ces hypothèses en posant

$$\Omega_x(\rho) = a\rho, \qquad \Omega_y(\rho) = b\rho, \qquad \Omega_z(\rho) = c\rho,$$

et

$$\Omega' = \nabla,$$

étant bien entendu que a, b, c sont les composantes d'un *vecteur constant* (sinon, il n'y aurait plus permutabilité entre une composante de Ω et une composante de Ω').

Revenons au cas général, et d'un champ vectoriel **V**, déduisons d'abord le vecteur susceptible de s'écrire symboliquement

$$\Omega \wedge \mathbf{V},$$

ou mieux celui qui a pour composantes

$$\Omega_y(Z) - \Omega_z(Y), \qquad \Omega_z(X) - \Omega_x(Z), \qquad \Omega_x(Y) - \Omega_y(X).$$

Soit **U** ce vecteur. Considérons le vecteur qui s'écrit symboliquement

$$\Omega' \wedge \mathbf{U}.$$

Les expressions développées de ses composantes peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{gathered}\Omega'_y[\Omega_x(Y) - \Omega_y(X)] - \Omega'_z[\Omega_z(X) - \Omega_x(Z)],\\ \Omega'_z[\Omega_y(Z) - \Omega_z(Y)] - \Omega'_x[\Omega_x(Y) - \Omega_y(X)],\\ \Omega'_x[\Omega_z(X) - \Omega_x(Z)] - \Omega'_y[\Omega_y(Z) - \Omega_z(Y)],\end{gathered}$$

ou encore, en vertu de la propriété distributive et de la permutabilité,

(231) $$\left\{\begin{aligned}&\Omega_x[\Omega'_x(X) + \Omega'_y(Y) + \Omega'_z(Z)] - \Omega'_x[\Omega_x(X)] - \Omega'_y[\Omega_y(X)] - \Omega'_z[\Omega_z(X)],\\ &\Omega_y[\Omega'_x(X) + \Omega'_y(Y) + \Omega'_z(Z)] - \Omega'_x[\Omega_x(Y)] - \Omega'_y[\Omega_y(Y)] - \Omega'_z[\Omega_z(Y)],\\ &\Omega_z[\Omega'_x(X) + \Omega'_y(Y) + \Omega'_z(Z)] - \Omega'_x[\Omega_x(Z)] - \Omega'_y[\Omega_y(Z)] - \Omega'_z[\Omega_z(Z)].\end{aligned}\right.$$

Le vecteur obtenu finalement a donc pour expression symbolique

$$\Omega\Omega'.\mathbf{V} - \Omega'.\Omega(\mathbf{V}),$$

sous la réserve de bien préciser, dans chaque cas, les conditions d'application de l'opérateur scalaire Ω', Ω.

Voici différentes applications de ce calcul.

I. Prenons pour Ω un opérateur dont les composantes sont définies par

$$(232) \qquad \Omega_x(\rho) = a\rho, \qquad \Omega_y(\rho) = b\rho, \qquad \Omega_z(\rho) = c\rho,$$

a, b, c désignant les composantes d'un vecteur $\mathbf{U}$; et pour Ω' un opérateur analogue, formé avec un vecteur $\mathbf{S}$. Le calcul précédent nous donne alors

$$(233) \qquad \mathbf{S} \wedge (\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = \lambda\mathbf{U} + \mu\mathbf{V},$$

en posant

$$(234) \qquad \lambda = +\mathbf{S}.\mathbf{V} \qquad \text{et} \qquad \mu = -\mathbf{S}.\mathbf{U}.$$

II. Prenons le même opérateur Ω que précédemment, mais *en spécifiant que le vecteur* **U** *est constant*, de manière qu'en prenant $\Omega' = \nabla$, nos hypothèses de permutabilité soient satisfaites. La quantité $\Omega'.\mathbf{V}$ sera donc la divergence du vecteur **V**, et puisque **U** est un vecteur constant, nous obtiendrons un premier terme

$$\mathbf{U} \text{ div } \mathbf{V}.$$

Examinons maintenant l'opérateur symbolique $\Omega'.\Omega$. Il se confond avec le produit scalaire symbolique $\mathbf{U}.\nabla$, c'est-à-dire avec l'opérateur invariant, déjà cité,

$$a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}.$$

Soit $(\mathbf{U}.\nabla)\mathbf{V}$ le résultat de l'application de cet opérateur au vecteur **V**. Sous la réserve que **U** est constant, nous pourrons écrire

$$(235) \qquad \text{rot}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{U} \text{ div } \mathbf{V} - (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{V}.$$

En supposant **U** variable et **V** constant, on établirait de même la relation

$$(236) \qquad \text{rot}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = -\mathbf{V} \text{ div } \mathbf{U} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{U},$$

qui se déduit de la précédente en intervertissant le rôle des lettres.

Cet exemple a l'intérêt de montrer la nécessité des hypothèses que nous avons faites. Il témoigne des précautions à prendre lorsqu'on entend traiter systématiquement ∇ comme un vecteur. En cas de doute, il est toujours préférable de revenir aux expressions développées des composantes et aux méthodes ordinaires. On trouvera ainsi, en composant par multiplication vectorielle deux champs **U** et **V** non constants,

$$(237) \qquad \text{rot}(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{U} \text{ div } \mathbf{V} - \mathbf{V} \text{ div } \mathbf{U} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{U} - (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{V},$$

formule qui se réduit bien à (235) ou à (236) lorsque l'un des vecteurs devient constant [1].

III. On peut supposer, dans ce qui précède, que Ω et Ω' désignent un seul et même opérateur de la classe étudiée, pourvu que les composantes de cet opérateur soient permutables. Prenons

$$\Omega = \Omega' = \nabla,$$

et remarquons que, dans ce cas, $\Omega'.\mathbf{V}$ désignant toujours la divergence de $\mathbf{V}$, en appliquant à ce scalaire l'opérateur Ω, nous formerons le terme

$$\text{grad div } \mathbf{V};$$

quant à l'opérateur symbolique $\Omega'.\Omega$, il se réduit à ∇^2, c'est-à-dire au laplacien, mais au lieu de l'appliquer cette fois à un scalaire, il faudra l'appliquer à un vecteur. Nous obtenons ainsi une formule importante

$$\text{(238)} \qquad \text{rot rot } \mathbf{V} = \text{grad div } \mathbf{V} - \nabla^2 \mathbf{V}.$$

Avant de quitter cet ordre d'idées, nous montrerons que l'hamiltonien conduit à un mode de développement taylorien, applicable à tous les champs scalaires ou vectoriels, lorsqu'on les suppose analytiques.

170. Développement taylorien d'un champ scalaire ou vectoriel. — Au n° 140, nous avons abordé déjà le problème suivant : développer une fonction de point $F(M)$ au voisinage d'un point particulier M_0. L'emploi systématique de l'opérateur d'Hamilton nous permet maintenant de donner à ce développement la forme suivante :

$$F(M) - F(M_0) = (\mathbf{M_0M}.\nabla)F + \frac{1}{2!}(\mathbf{M_0M}.\nabla)^{(2)}F + \frac{1}{3!}(\mathbf{M_0M}.\nabla)^{(3)}F + \ldots.$$

En reprenant les notations que nous avons adoptées aux n°s 140 et 141, l'opérateur

$$\mathbf{M_0M}.\nabla$$

est en effet identique au suivant

$$h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}.$$

Soit maintenant un champ vectoriel analytique $\mathbf{V}(M)$. Les développements de ses composantes peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
u - u_0 &= \left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0^{(2)} + \ldots,\\
v - v_0 &= \left(h\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y} + l\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y} + l\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0^{(2)} + \ldots,\\
w - w_0 &= \left(h\frac{\partial w}{\partial x} + k\frac{\partial w}{\partial y} + l\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial w}{\partial x} + k\frac{\partial w}{\partial y} + l\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0^{(2)} + \ldots;
\end{aligned}$$

(1) On peut d'ailleurs considérer la formule (237) comme résultant de la remarque suivante, applicable à des cas plus généraux : lorsque l'opérateur ∇ porte sur une expression où figurent plusieurs grandeurs variables, on peut se ramener à une somme d'opérations dans chacune desquelles ∇ ne porterait que sur une seule des grandeurs variables.

on peut condenser ces trois développements en un seul

$$\mathbf{V}(\mathrm{M}) - \mathbf{V}(\mathrm{M}_0) = (\mathbf{M_0M}\,.\,\nabla)\,\mathbf{V} + \frac{1}{2!}(\mathbf{M_0M}\,.\,\nabla)^{(2)}\,\mathbf{V} + \ldots + \frac{1}{n!}(\mathbf{M_0M}\,.\,\nabla)^{(n)}\,\mathbf{V} \ldots$$

où chaque terme entre parenthèses est un opérateur, appliqué au champ en M_0, et obtenu par itération de l'opérateur

$$\mathbf{M_0M}\,.\,\nabla = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}.$$

L'hamiltonien conduit ainsi à un mode de représentation commun à tous les champs analytiques, tant scalaires que vectoriels.

171. Points singuliers d'un champ. — La théorie des fonctions analytiques conduit à distinguer les valeurs attribuées aux variables en valeurs régulières et en valeurs singulières. Un système de valeurs est régulier lorsque le développement de Taylor de la fonction étudiée est possible pour ce système. Les singularités de la fonction sont donc, par définition, les systèmes de valeurs pour lesquels il devient impossible de la représenter par une série entière. Cette notion se généralise d'elle-même à la théorie des champs scalaires ou vectoriels. Pour les premiers, il ne s'agit en effet que d'une modification de la terminologie, puisqu'il n'y a pas de différence essentielle entre champ scalaire et fonction de plusieurs variables. Pour les autres, on substitue à l'étude d'une fonction l'étude simultanée de plusieurs fonctions.

Nous supposerons toujours par la suite que les singularités des champs que nous aurons à étudier, ou bien sont localisées en des points isolés, et en nombre fini dans tout volume fini, ou bien sont réparties continûment sur des lignes isolées (et de manière que toute portion finie de surface plane soit coupée par ces lignes en un nombre fini de points), ou bien sont réparties continûment sur des surfaces soumises à des restrictions du même genre.

Notons également la nécessité de subdiviser les champs continus en champs *uniformes* (ou monodromes) et en champs *multiformes* (ou polydromes). Un champ est uniforme si en chaque point de l'espace l'*élément* du champ (scalaire ou vecteur) possède une détermination unique, à laquelle on est toujours conduit en suivant par continuité la valeur du champ, le long d'un chemin quelconque aboutissant en ce point. Tout champ scalaire qui, dans un certain système fondamental, s'exprime rationnellement en fonction des coordonnées x, y, z d'un point du champ est évidemment uniforme. Il en est de même pour tout champ vectoriel dont les composantes sont des fonctions rationnelles. En revanche, un champ scalaire dont la valeur au point de coordonnées x, y, z serait

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

se rangerait évidemment dans la catégorie des champs multiformes, etc.

172. Lignes de champ. — Considérons plus spécialement un champ de vecteurs $\mathbf{V}(\mathrm{M})$. On appelle *lignes de champ* les lignes qui, en chaque point, sont tangentes à la direction du champ, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$d\mathrm{M} = \mathbf{V}(\mathrm{M})\,d\lambda,$$

en désignant par $d\lambda$ un certain scalaire, qu'il est naturel d'envisager comme une différentielle.

Avec les notations cartésiennes, la relation précédente prend la forme

$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)} = d\lambda.$$

Pour déterminer les lignes de champ, il faut intégrer ces équations. On obtient un système de lignes qui dépendent de deux constantes d'intégration, et, par suite, forment une famille à deux paramètres. Nous en verrons plus loin des exemples.

Pour un champ scalaire, on peut définir en chaque point une direction remarquable, celle de son gradient. On est ainsi amené à considérer les lignes qui en chaque point sont tangentes au gradient. Ces lignes sont encore celles qui, en partant d'un point du champ scalaire, permettent de cheminer de manière qu'à chaque instant, pour le trajet accompli, la quantité dont s'est modifiée le champ soit maximum. Si le champ n'a que deux dimensions, on peut le représenter, dans l'espace ordinaire, au moyen d'une surface $u = f(x, y)$. Les lignes précédentes sont alors les lignes de plus grande pente de cette surface.

173. Relations de la théorie des champs de vecteurs avec celle des transformations finies. — Le lecteur a pu être surpris du rôle prépondérant que nous avons donné, au cours de cet exposé, à la notion de transformation infinitésimale attachée à un champ de vecteurs. Il importe maintenant d'expliquer pourquoi, jusqu'à présent, nous avons évité de recourir à des transformations finies et d'indiquer en même temps les relations qui existent entre l'étude de ces dernières et celle des champs vectoriels.

La préférence donnée jusqu'ici aux transformations infinitésimales s'explique par la facilité avec laquelle on peut en opérer la composition : nous avons en effet montré, au nº 155, que cette composition s'effectue par voie d'addition géométrique. C'est pourquoi, en ramenant l'étude d'un champ à celle d'une déformation infiniment petite, nous avons été conduits à définir des opérateurs (comme la divergence, le rotationnel, la déformation pure) doués d'un caractère commun très remarquable : ils sont distributifs par rapport à l'addition géométrique [on dit aussi : *linéaires* (1)].

En passant des transformations infiniment petites aux transformations finies, nous pourrons définir encore des opérateurs invariants : mais ces derniers ne seront plus distributifs par rapport à l'addition.

Considérons une transformation qui à chaque point M fait correspondre un point M' : à chaque point M est associé par cette transformation le vecteur $\mathbf{V}(M) = \mathbf{MM'}$. Prenons un système orthogonal et normal, soient x, y, z les coordonnées de M et x', y', z' celles de M' dans ce système. Désignons par f, g, h les composantes du vecteur MM'. La transformation donnée est définie par les équations

$$(239)\qquad x' = x + f(x, y, z), \qquad y' = y + g(x, y, z), \qquad z' = z + h(x, y, z).$$

(1) Autant que possible, nous nous sommes abstenus ici d'employer cette locution. Il nous semble préférable de réserver l'épithète *linéaire* pour l'appliquer à la géométrie dont l'étude a fait l'objet de la première partie de ces leçons, par opposition à la géométrie métrique. On peut créer une certaine gêne en disant que le rotationnel est un opérateur linéaire. Il est préférable de dire d'une part que c'est un opérateur distributif par rapport à l'addition, d'autre part que c'est un opérateur métrique.

La transformation linéaire tangente, en un couple de points correspondants, tel que M_0, M'_0, est définie par les équations suivantes [1] :

$$(239\ bis)\quad \begin{cases} x'_1 - x'_0 = (x - x_0)\left[1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_0}\right] + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y_0} + (z - z_0)\dfrac{\partial f}{\partial z_0}, \\ y'_1 - y'_0 = (x - x_0)\dfrac{\partial g}{\partial x_0} + (y - y_0)\left[1 + \dfrac{\partial g}{\partial y_0}\right] + (z - z_0)\dfrac{\partial g}{\partial z_0}, \\ z'_1 - z'_0 = (x - x_0)\dfrac{\partial h}{\partial x_0} + (y - y_0)\dfrac{\partial h}{\partial y_0} + (z - z_0)\left[1 + \dfrac{\partial h}{\partial z_0}\right]. \end{cases}$$

Cette transformation est la somme géométrique (n° 160) de deux autres transformations :

1° la transformation unité;

2° une transformation linéaire θ, dont le tableau des coefficients est le suivant :

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f}{\partial y_0} & \dfrac{\partial f}{\partial z_0}, \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_0} & \dfrac{\partial g}{\partial y_0} & \dfrac{\partial g}{\partial z_0}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_0} & \dfrac{\partial h}{\partial y_0} & \dfrac{\partial h}{\partial z_0}. \end{matrix}$$

L'étude de la transformation linéaire tangente en un couple de points correspondants à la transformation donnée se ramène en dernière analyse, à celle de la transformation θ.

Ce point de vue permet de rattacher au champ initial $\mathbf{V}(M)$ des champs scalaires et des champs vectoriels invariants. Donnons-en quelques exemples :

I. Tout d'abord, écrivons le jacobien de la transformation donnée :

$$J(M) = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f}{\partial y_0} & \dfrac{\partial f}{\partial z_0} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_0} & 1 + \dfrac{\partial g}{\partial y_0} & \dfrac{\partial g}{\partial z_0} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_0} & \dfrac{\partial h}{\partial y_0} & 1 + \dfrac{\partial h}{\partial z_0} \end{vmatrix}.$$

Si nous développons ce déterminant, nous obtenons

$$1 + (\operatorname{div} \mathbf{V})_0 + \left[\frac{D(g, h)}{D(y, z)} + \frac{D(h, f)}{D(z, x)} + \frac{D(f, g)}{D(x, y)}\right]_0 + \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)_0}.$$

La quantité $\dfrac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)_0} = \Delta_0$ est un invariant : elle constitue le déterminant de la transformation θ. Donc $J(M)$ se compose de quatre termes, dont trois sont des invariants. Il en est de même du terme suivant (après suppression de l'indice zéro) :

$$\varphi(M) = \frac{D(g, h)}{D(y, z)} + \frac{D(h, f)}{D(z, x)} + \frac{D(f, g)}{D(x, y)}.$$

Nous obtenons donc ainsi un champ scalaire lié d'une manière intrinsèque au champ vectoriel $\mathbf{V}(M)$.

II. Appliquons la transformation θ (définie en chaque point M du champ) au vecteur $\mathbf{V}(M)$ (en ce même point du champ). Du champ vectoriel donné, nous tirerons

(1) Nous employons les notations $x'_1 - x'_0$, $y'_1 - y'_0$, $z'_1 - z'_0$ pour rappeler qu'il s'agit du point x'_1, y'_1, z'_1 transformé.

ainsi un autre champ vectoriel invariant, lié au premier d'une manière intrinsèque. Le vecteur de ce champ s'exprime symboliquement par la notation

$$\mathbf{U} = (\mathbf{V}.\nabla)\mathbf{V}.$$

III. Appliquons au vecteur **V**(M), en chaque point M du champ, non plus la transformation θ mais la transformation inverse θ^{-1}, telle qu'elle est définie pour ce même point M. Écrivons le tableau des coefficients de θ^{-1} :

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(g, h)}{D(y, z)_0} & \dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(g, h)}{D(z, x)_0} & \dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(g, h)}{D(x, y)_0}, \\
\dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(h, f)}{D(y, z)_0} & \dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(h, f)}{D(z, x)_0} & \dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(h, f)}{D(x, y)_0}, \\
\dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(f, g)}{D(y, z)_0} & \dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(f, g)}{D(z, x)_0} & \dfrac{1}{\Delta_0}\dfrac{D(f, g)}{D(x, y)_0}.
\end{array}$$

Appliquons maintenant cette transformation au vecteur **V**(M). Nous obtiendrons un vecteur invariant dont les trois composantes sont respectivement (nous supprimons encore les indices)

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ g & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ h & \dfrac{\partial g}{\partial z} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f & \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ g & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ h & \dfrac{\partial h}{\partial z} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ g & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ h & \dfrac{\partial f}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

IV. Puisque nous nous plaçons au point de vue métrique, nous pouvons envisager la transformation linéaire déduite de θ^{-1} en échangeant, dans le tableau qui définit cette dernière, le rôle des lignes et des colonnes. Nous aurons une nouvelle transformation linéaire, définie en chaque point du champ, et liée à celui-ci d'une manière intrinsèque. Appliquons-la au vecteur **V**(M). Nous obtiendrons un nouveau champ vectoriel **W**(M) dont les composantes sont

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ g & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ h & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f & \dfrac{\partial f}{\partial z} & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ g & \dfrac{\partial g}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ h & \dfrac{\partial h}{\partial z} & \dfrac{\partial h}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ g & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ h & \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

D'un champ invariant **W**(M) tel que l'un des précédents, on pourra en déduire une infinité d'autres de la forme $\rho(M)\mathbf{W}(M)$ en désignant par $\rho(M)$ une fonction de point invariante. C'est ainsi qu'en prenant $\rho(M) = \dfrac{\Delta}{(f^2 + g^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$, en adoptant pour **W**(M) le champ cité en dernier lieu, on peut déduire de **V**(M) un champ invariant **K**(M), qui a été utilisé par Kronecker pour résoudre ce problème :

Dénombrer les points d'un domaine où le vecteur du champ donné **V**(M) *s'annule* [1].

Il n'y a pas lieu d'insister davantage sur ces procédés, qu'on peut varier à l'infini, pour obtenir des opérations non linéaires. Nous allons maintenant passer en revue les particularités les plus importantes qu'on rencontre dans l'étude des champs vectoriels.

(1) Cf. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, n° 23.

VI

Champs remarquables. Potentiels.

174. Position du problème. — Soit le champ vectoriel **V**(M). Revenons au point de vue du n° 154, qui consiste à synthétiser les éléments différentiels du premier ordre de ce champ au point M, par l'intermédiaire de la transformation linéaire infinitésimale qui associe les deux vecteurs

$$\delta M \qquad \text{et} \qquad \delta M + \delta \mathbf{V} dt.$$

Nous avons vu que cette transformation résulte de la composition d'un déplacement infinitésimal et d'une transformation autométrique. Nous sommes ainsi amenés à poser les deux problèmes suivants :

1° Trouver les champs pour lesquels la transformation précédente se réduit en chaque point à un déplacement infinitésimal ou encore ceux pour lesquels la déformation pure est partout nulle.

2° Trouver les champs pour lesquels la transformation en question est partout autométrique, ou encore ceux pour lesquels le rotationnel est nul en chaque point.

Ce sont ces deux problèmes que nous allons maintenant étudier. Chacun d'eux met en jeu une hypothèse, qui est de nature locale, et qu'on suppose vérifiée en chaque point du champ. Il s'agit d'en déduire des propriétés du champ considéré dans son ensemble.

Nous montrerons d'abord que si la déformation pure est partout nulle, le champ dans son ensemble est le champ des vitesses instantanées d'un déplacement petit, ou encore que le champ est un champ de moments résultants (n° 160).

175. Champs pour lesquels la déformation pure est partout nulle. — Les coordonnées étant toujours supposées orthogonales et normales, soient u, v, w les composantes du vecteur **V** du champ au point $M(x, y, z)$. Considérons les formules (213) : elles définissent, nous l'avons vu, la transformation linéaire qui fait correspondre au vecteur δM le vecteur $\delta M + \delta \mathbf{V} dt$. Dans le cas général, cette transformation linéaire est la somme géométrique :

1° d'une transformation autométrique ;

2° d'une rotation ;

toutes les transformations considérées ayant le caractère infinitésimal. D'après ce que nous avons vu au n° 162, la transformation autométrique précédente fait passer du vecteur δM au vecteur

$$\delta M + \left(\delta \mathbf{V} - \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V} \wedge \delta M\right) dt.$$

Donc, la forme quadratique attachée à cette transformation autométrique a pour expression

$$(240) \qquad \delta M^2 + \delta \mathbf{V} . \delta M \, dt.$$

Pour que cette transformation soit la transformation identique, il faut et il suffit que l'on ait

(241) $$\delta \mathbf{V} . \delta M = 0.$$

Or cette relation possède une signification simple : considérons une droite quelconque et faisons varier le point M le long de cette droite. Étudions la variation correspondante du vecteur $\mathbf{V}(M)$, et introduisons sa dérivée géométrique dans la direction de la droite. De l'égalité (241), on déduit, en divisant par δM^2 et en appelant $\mathbf{u}$ le vecteur unité de la droite,

$$\frac{\delta \mathbf{V}}{|\delta M|} . \mathbf{u} = 0,$$

qui exprime que la dérivée géométrique de $\mathbf{V}$, le long de la droite, est normale à cette droite en chacun de ses points, ou encore que la projection du vecteur du champ sur la droite est constante.

En résumé, si la déformation pure est partout nulle, le champ possède la propriété suivante :

Étant donnée une droite quelconque, en tout point de cette droite, la projection du vecteur du champ y est constante.

Un tel champ s'identifie avec un champ de moments : en effet, il est facile d'apercevoir successivement les propriétés suivantes :

1° Si deux champs jouissent séparément de la propriété précédente, il en est de même de leur différence géométrique;

2° Si un champ possédant cette propriété s'annule en trois points A, B, C non alignés, il est identiquement nul ; en effet, soit M un point non situé dans le plan A, B, C. Par hypothèse, nous avons toujours

$$\mathbf{V}(M).\mathbf{MA} = \mathbf{V}(A).\mathbf{MA}, \qquad \mathbf{V}(M).\mathbf{MB} = \mathbf{V}(B).\mathbf{MB}, \qquad \mathbf{V}(M).\mathbf{MC} = \mathbf{V}(C).\mathbf{MC}.$$

Puisqu'ici les seconds membres sont nuls, le vecteur $\mathbf{V}(M)$ a des composantes covariantes nulles dans le système **MA**, **MB**, **MC**, qui est fondamental, puisque M n'est pas situé dans le plan ABC. Donc $\mathbf{V}(M)$ s'annule en tous les points M, sauf peut-être en ceux qui appartiennent au plan ABC. La continuité exige qu'il s'annule aussi dans ce plan.

3° Étant donné un champ non nul possédant toujours la propriété ci-dessous, en appelant $\mathbf{V}(A)$, $\mathbf{V}(B)$, $\mathbf{V}(C)$ le vecteur du champ en trois points A, B, C non alignés, il existe un système et un seul de vecteurs glissants (deux systèmes équivalents n'étant pas regardés comme distincts) tels que les moments résultants en A, B, C aient pour grandeurs géométriques respectives $\mathbf{V}(A)$, $\mathbf{V}(B)$, $\mathbf{V}(C)$. En effet, d'après la relation fondamentale (91), cela nous ramène à démontrer qu'il existe, dans les conditions où nous nous plaçons, un point R et un seul tel qu'on ait à la fois

(242) $$\mathbf{V}(B) - \mathbf{V}(A) = \mathbf{AR} \wedge \mathbf{AB},$$

(243) $$\mathbf{V}(C) - \mathbf{V}(A) = \mathbf{AR} \wedge \mathbf{AC}.$$

La relation (242) exige la condition de compatibilité

(244) $$[\mathbf{V}(B) - \mathbf{V}(A)].\mathbf{AB} = 0.$$

Cette condition est remplie par hypothèse. Il y a par suite une infinité de vecteurs **AR** satisfaisant à la condition (242) : si $\mathbf{AR}_0$ est l'un deux, tous les autres sont de la forme

$$\mathbf{AR}_0 + \lambda \mathbf{AB}.$$

Portons cette valeur de **AR** dans la relation (243). Nous aurons à déterminer le scalaire λ par la condition

$$\mathbf{V}(C) - \mathbf{V}(A) = \mathbf{AR}_0 \wedge \mathbf{AC} + \lambda \mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}.$$

La condition de possibilité est que les vecteurs

$$\mathbf{V}(C) - \mathbf{V}(A) - \mathbf{AR}_0 \wedge \mathbf{AC} \quad \text{et} \quad \mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}$$

soient colinéaires, ou que le premier soit orthogonal à **AB** et à **AC**. La condition d'orthogonalité avec **AC** se réduit à

$$(245) \qquad [\mathbf{V}(C) - \mathbf{V}(A)].\mathbf{AC} = 0.$$

Elle est encore remplie par hypothèse. Reste à écrire l'orthogonalité avec **AB**, ou, ce qui revient au même, avec **BC**. Transformons un peu le vecteur étudié et écrivons-le

$$\mathbf{V}(C) - \mathbf{V}(B) + \mathbf{V}(B) - \mathbf{V}(A) - \mathbf{AR}_0 \wedge \mathbf{AC},$$

et remarquons qu'il est permis de substituer à $\mathbf{V}(B) - \mathbf{V}(A)$ le vecteur $\mathbf{AR}_0 \wedge \mathbf{AB}$. Nous obtenons

$$\mathbf{V}(C) - \mathbf{V}(B) - \mathbf{AR}_0 \wedge \mathbf{BC}.$$

La condition d'orthogonalité avec **BC** se réduit donc à

$$(246) \qquad [\mathbf{V}(C) - \mathbf{V}(B)].\mathbf{BC} = 0.$$

Elle est encore remplie par hypothèse. En résumé, *moyennant les conditions* (244), (245), (246), *il existe toujours un système de vecteurs glissants* (et un seul) *dont les moments en* A, B, C *sont respectivement* **V**(A), **V**(B), **V**(C). *Le moment résultant en* A *est* **V** (A), *la somme géométrique est* **AR**.

Le théorème est alors établi, puisqu'en retranchant ce champ de moments du champ étudié, nous obtenons un champ de la même espèce, qui s'annule en A, B, C, et qui, par suite, est identiquement nul.

Il nous reste un dernier point à établir :

Si un champ correspond à une transformation infinitésimale dont la déformation pure est partout nulle, cette transformation conserve les distances.

En effet, cette transformation fait passer des points P et Q aux points P′ et Q′ définis par les relations

$$\mathbf{PP'} = \mathbf{V}(P)\,dt = dP,$$
$$\mathbf{QQ'} = \mathbf{V}(Q)\,dt = dQ.$$

Calculons $\mathbf{P'Q'}^2 - \mathbf{PQ}^2$, ou, ce qui revient au même, $d\overline{PQ}^2$.

Nous aurons

$$\frac{1}{2} d\,\mathbf{PQ}^2 = \mathbf{PQ} \cdot d\mathbf{PQ}.$$

le second membre désignant un produit scalaire, qu'on peut encore écrire

$$\mathbf{PQ}.d\mathrm{Q} - \mathbf{PQ}.d\mathrm{P}.$$

En définitive, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbf{PQ}^2 &= \mathbf{PQ}.\frac{d\mathrm{Q}}{dt} - \mathbf{PQ}.\frac{d\mathrm{P}}{dt}\\ &= \mathbf{PQ}.[\mathbf{V}(\mathrm{Q}) - \mathbf{V}(\mathrm{P})].\end{aligned}$$

Or, d'après la propriété spécifique du champ, le second membre est nul. Il y a donc bien conservation des distances.

En résumé, *l'annulation identique de la déformation pure* est bien la condition nécessaire et suffisante *pour que le changement de configuration défini par la transformation infinitésimale qui correspond au champ* soit *un déplacement infinitésimal.* Le champ se réduit alors à un champ de moments.

La recherche précédente peut s'effectuer aussi analytiquement. Il faut alors partir de l'expression développée de (240), déjà écrite au n° 161 [expression (214)], et écrire qu'elle se réduit à $h^2 + k^2 + l^2$, ce qui revient à exprimer que le tableau carré formé par les neuf dérivées partielles premières de u, v, w est symétrique gauche. Posons donc

$$(247)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -r, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = q,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = r, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = -p,\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = -q, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = p, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0,\end{array}\right.$$

en désignant par p, q, r des fonctions qui restent à déterminer. De l'examen du tableau ci-dessus, on déduit aisément :

1° Les fonctions u, q, r sont indépendantes de x;

2° Les fonctions v, r, p sont indépendantes de y;

3° Les fonctions w, p, q sont indépendantes de z.

En définitive, p dépend de x seul, q de y seul, r de z seul. Or en exprimant les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

on trouve

$$\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0,\qquad \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,\qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial z} = 0,$$

égalités qui montrent que p, q, r se réduisent à des constantes. La solution s'écrit donc finalement

$$(248)\qquad \begin{cases} u = u_0 + qz - ry, \\ v = v_0 + rx - pz, \\ w = w_0 + py - qx, \end{cases}$$

où u_0, v_0 w_0 désignent aussi des constantes. C'est bien là la forme générale des équations qui définissent un champ de moments, lorsque le moment par rapport à l'origine et la somme géométrique ont pour composantes respectives u_0, v_0, w_0 et p, q, r. Ces formules sont aussi celles qui donnent le champ des vitesses aux divers points d'un solide : u_0, v_0, w_0 sont alors composantes de la vitesse d'un point particulier, lié à ce solide et pris pour origine; p, q, r sont, d'après le théorème du n° 160, les composantes de la rotation instantanée. Suivant une remarque générale, le rotationnel sera ici constant et égal au double de la rotation.

Avant de quitter cet ordre d'idées, nous étudierons encore le cas où la déformation pure en chaque point serait *isotrope*, c'est-à-dire où la dilatation linéaire locale serait la même dans toutes les directions : cela équivaut à supposer que la déformation pure se réduise en chaque point à une homothétie.

Cette étude aura un double intérêt :

1° Elle nous montrera les relations de la théorie actuelle avec celle des transformations infinitésimales qui conservent les angles. En effet, la conservation des angles est une condition équivalente à la suivante : réduction de la transformation infinitésimale tangente à une similitude, ou encore de sa composante autométrique à une homothétie.

2° Elle nous fera voir que le champ d'applications des opérateurs, définis indépendamment du nombre des dimensions de l'espace, est un champ limité : autrement dit, elle nous montrera que tel mode de symbolisme qui réussit en certaines circonstances à donner aux calculs et aux raisonnements une forme plus brève et même parfois plus compréhensive, échoue complètement dans d'autres problèmes. Cela montre bien qu'il y a lieu de ne pas être trop systématique et de ne pas s'attacher d'une façon trop exclusive à tel ou tel système de notations. Ce sont ces points que nous allons maintenant développer.

176. Champs à déformation pure isotrope. — La condition que nous cherchons à exprimer peut revêtir différentes formes.

Cette condition a trait à la déformation pure, qui fait correspondre au vecteur $\delta\mathbf{M}$ le vecteur

$$\delta\mathbf{M} + \left(\delta\mathbf{V} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{V} \wedge \delta\mathbf{M}\right)dt.$$

Cette déformation pure doit se réduire à une homothétie infinitésimale, permettant de passer du vecteur $\delta\mathbf{M}$ au vecteur $\delta\mathbf{M}[1 + \rho(\mathbf{M})dt]$. On doit donc avoir

$$(249)\qquad \rho(\mathbf{M})\delta\mathbf{M} = \delta\mathbf{V} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{V} \wedge \delta\mathbf{M},$$

d'où l'on déduit

$$(250)\qquad \rho(\mathbf{M})\delta\mathbf{M}^2 = \delta\mathbf{V}.\delta\mathbf{M}.$$

La condition (230), qui est nécessaire, est aussi suffisante, car si elle est remplie la forme quadratique attachée à la déformation pure a pour expression

$$\delta M . \left[\delta M + \left(\delta V - \frac{1}{2} \operatorname{rot} V \wedge \delta M\right) dt\right],$$

ou

$$\delta M^2 [1 + \rho(M) dt],$$

qui est bien la forme attachée à une homothétie infinitésimale.

Remarquons que la condition (230) peut être interprétée de la manière suivante : elle exprime que l'on a

$$\frac{\delta V}{|\delta M|} \cdot \frac{\delta M}{|\delta M|} = \rho(M),$$

ou encore que le produit scalaire de la dérivée géométrique de **V** dans une direction par le vecteur unité de cette direction est le même pour toutes les droites rayonnant d'un point, en un mot, qu'il se réduit à une fonction de point $\rho(M)$.

On peut être tenté d'exprimer cette condition à l'aide de l'hamiltonien : en appelant **u** le vecteur unité d'une demi-droite issue de M, la dérivée géométrique de **V** en ce point suivant cette demi-droite s'obtient en appliquant à **V** l'opérateur $\mathbf{u} . \nabla$, son expression symbolique est donc

$$(\mathbf{u} . \nabla) \mathbf{V},$$

et il faut écrire que l'expression

$$\mathbf{u} . [(\mathbf{u} . \nabla) \mathbf{V}] \tag{231}$$

n'est pas fonction de la direction **u**, mais seulement du point M.

Jusqu'à présent, nous sommes autorisés à concevoir deux sortes de solutions de ce problème :

1° *une solution à formules développées*, avec mise en évidence des composantes relatives à un système fondamental particulier, suivant les méthodes de la géométrie analytique ;

2° *une solution intrinsèque*, basée sur l'étude préalable (amorcée ici) des opérateurs (finis ou différentiels) invariants et de leurs modes de composition.

Le point sur lequel nous nous proposons d'insister est le suivant : tout espoir de solution de cette deuxième espèce doit être écarté, si du moins l'on n'entend y faire intervenir que des opérateurs dont les définitions et les modes de composition sont posés ou établis indépendamment du nombre des dimensions de l'espace, à l'exemple du produit scalaire, de l'hamiltonien, et des opérateurs composés à l'aide de ceux-là.

Nous allons montrer en effet que la solution se présente avec un caractère de généralité bien différent, suivant qu'on raisonne dans le cas de deux ou de trois dimensions.

177. Cas de trois dimensions. — Appelons toujours u, v, w les composantes, relatives à un système orthogonal et normal, du vecteur du champ au point x, y, z. Appelons α, β, γ celles de **u**. Il faut écrire que l'expression

$$\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial v}{\partial z} + \beta\gamma\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \gamma\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \alpha\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{232}$$

est indépendante de α, β, γ, qui sont liées elles-mêmes par la condition

$$(252\ bis) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$(253) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right.$$

La valeur commune de $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ n'est autre que la quantité $\rho(x, y, z)$, expression relative à notre système fondamental de la fonction de point $\rho(M)$ introduite plus haut.

Donnons au problème la forme suivante : supposons connue *a priori* la fonction $\rho(x, y, z)$ et cherchons à déterminer des fonctions u, v, w satisfaisant aux six équations linéaires

$$(254) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \rho, \\ & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right.$$

La méthode la plus naturelle pour l'étude de ce système consiste à considérer une intégrale u, v, w développable en série et à chercher comment s'opère le calcul des coefficients dans les développements de u, v, w. Le problème est ainsi ramené au calcul des dérivées partielles de u, v, w pour un système de valeurs x, y, z.

Sur les neuf dérivées partielles premières, on peut en choisir trois arbitrairement, puisque ces neuf quantités sont liées par les six équations (254) : on pourra, par exemple, pour achever de les déterminer, se donner arbitrairement les trois différences $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, c'est-à-dire les trois composantes du rotationnel.

Passons au calcul des dérivées secondes. Elles sont au nombre de six pour chaque composante telle que u. Il y en a donc en tout dix-huit. Ces dix-huit inconnues sont astreintes à vérifier les dix-huit équations qu'on obtient en appliquant

à chaque équation (254) les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Ces dix-huit équations sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} u_{x^2} &= v_{xy} = w_{xz} = \rho_x, \\ u_{xy} &= v_{y^2} = w_{yz} = \rho_y, \\ u_{xz} &= v_{yz} = w_{z^2} = \rho_z. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} w_{xy} + v_{xz} &= 0, \\ w_{y^2} + v_{yz} &= 0, \\ w_{zy} + v_{z^2} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} u_{xz} + w_{x^2} &= 0, \\ u_{yz} + w_{xy} &= 0, \\ u_{z^2} + w_{xz} &= 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} v_{x^2} + u_{xy} &= 0, \\ v_{xy} + u_{y^2} &= 0, \\ v_{xz} + u_{yz} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Nous y avons simplifié à dessein les notations, en représentant une dérivée par la même lettre que la fonction qui lui a donné naissance, en ayant soin d'écrire en indice la où les variables par rapport auxquelles une dérivation a été effectuée.

Nous voyons immédiatement que ce système admet une solution et une seule : en effet, ses neuf premières équations sont résolues et donnent :

1° les dérivées secondes de u, où l'une au moins des dérivations est faite par rapport à x;

2° les dérivées secondes de v, où l'une au moins des dérivations est faite par rapport à y;

3° les dérivées secondes de w, où l'une ou moins des dérivations est faite par rapport à z.

Les neuf dernières équations déterminent alors les inconnues restantes : tout d'abord, les trois d'entre elles qui, dans la disposition ci-dessous, sont en diagonale principale donnent

$$u_{yz} = v_{zx} = w_{xy} = 0.$$

Les autres déterminent alors en fonction des dérivées précédemment calculées les six dernières inconnues u_{y^2}, u_{z^2}, v_{z^2}, v_{x^2}, w_{x^2}, w_{y^2}.

Nous pouvons donc passer au calcul des dérivées du troisième ordre. Il y en a dix par composante, c'est-à-dire trente en tout. Ces trente inconnues sont astreintes à vérifier les trente-six équations obtenues en appliquant à chacune des équations (254) les opérateurs $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$. Écrivons ces équations

$$\left\{\begin{aligned} u_{x^3} &= v_{x^2y} = w_{x^2z} = \rho_{x^2}, \\ u_{xy^2} &= v_{y^3} = w_{y^2z} = \rho_{y^2}, \\ u_{xz^2} &= v_{yz^2} = w_{z^3} = \rho_{z^2}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} u_{xyz} &= v_{y^2z} = w_{yz^2} = \rho_{yz}, \\ u_{x^2z} &= v_{xyz} = w_{xz^2} = \rho_{zx}, \\ u_{x^2y} &= v_{xy^2} = w_{xyz} = \rho_{xy}. \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} &a) \\ & \\ & \\ &a') \\ & \\ & \end{aligned}\left\{\begin{aligned} w_{x^2y} + v_{x^2z} &= 0, \\ w_{y^3} + v_{y^2z} &= 0, \\ w_{yz^2} + v_{z^3} &= 0, \\ w_{y^2z} + v_{yz^2} &= 0, \\ w_{xyz} + v_{xz^2} &= 0, \\ w_{xy^2} + v_{xyz} &= 0, \end{aligned}\right. \quad \begin{aligned} & \\ &b) \\ & \\ & \\ &b') \\ & \end{aligned}\left\{\begin{aligned} u_{x^2z} + w_{x^3} &= 0, \\ u_{y^2z} + w_{xy^2} &= 0, \\ u_{z^3} + w_{xz^2} &= 0, \\ u_{yz^2} + w_{xyz} &= 0, \\ u_{xz^2} + w_{x^2z} &= 0, \\ u_{xyz} + w_{x^2y} &= 0, \end{aligned}\right. \quad \begin{aligned} & \\ & \\ &c) \\ & \\ & \\ &c') \end{aligned}\left\{\begin{aligned} v_{x^3} + u_{x^2y} &= 0, \\ v_{xy^2} + u_{y^3} &= 0, \\ v_{xz^2} + u_{yz^2} &= 0, \\ v_{xyz} + u_{y^2z} &= 0, \\ v_{x^2z} + u_{xyz} &= 0, \\ v_{x^2y} + u_{xy^2} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Les dix-huit premières équations sont résolues et donnent :

1° les six dérivées troisièmes de u, où l'une au moins des dérivations est faite par rapport à x;

2° les six dérivées troisièmes de v, où l'une au moins des dérivations est faite par rapport à y;

3° les six dérivées troisièmes de w, où l'une au moins des dérivations est faite par rapport à z.

Les dix-huit dernières vont alors nous déterminer les douze inconnues restantes

$$u_{y^3}, \quad u_{y^2z}, \quad u_{yz^2}, \quad u_{z^3}, \quad v_{z^3}, \quad v_{z^2x}, \quad v_{zx^2}, \quad v_{x^3}, \quad w_{x^3}, \quad w_{x^2y}, \quad w_{xy^2}, \quad w_{y^3}$$

moyennant six conditions de compatibilité. Mettons à part, dans nos dix-huit équations, les six qui ont été repérées ci-dessus, à l'aide des lettres a), b), c), a'), b'), c'). Chacune des autres contient une dérivée déjà calculée et l'une des douze inconnues qui restent à déterminer. Il suffit donc de porter les valeurs ainsi trouvées dans a), b), c), a'), b'), c') pour obtenir les six conditions de compatibilité cherchées. Ce sont respectivement, en les désignant par des symboles qui rappellent les équations dont elles proviennent,

$$a_1)\quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial z} = 0, \qquad b_1)\quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial x} = 0, \qquad c_1)\quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$a'_1)\quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0, \qquad b'_1)\quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \qquad c'_1)\quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = 0.$$

En définitive, la compatibilité exige donc :

1° que toutes les dérivées secondes de la fonction ρ soient nulles, c'est-à-dire que cette fonction se réduise à un polynome du premier degré ou à une constante;

2° que toutes les dérivées troisièmes de u, v, w soient nulles, c'est-à-dire que ces fonctions se réduisent à des polynomes du second degré au plus.

On obtient, de ce fait, deux sortes de solutions :

1° Supposons d'abord que ρ se réduise à une constante m : les u, v, w seront alors des fonctions du premier degré seulement. D'ailleurs le système (254), qui détermine ces trois fonctions, est linéaire. Pour en obtenir l'intégrale générale, il suffit d'ajouter à une de ses solutions l'intégrale générale du même système sans second membre, c'est-à-dire obtenu en faisant $\rho = 0$. Or un tel système est précisément celui qui exprime que la déformation pure est partout nulle. De la solution particulière évidente

$$u = mx, \qquad v = my, \qquad w = mz$$

du système (254) (où $\rho = m$), on passe donc à son intégrale générale qui est

$$(255)\qquad \begin{cases} u = u_0 + mx + qz - ry, \\ v = v_0 + my + rx - pz, \\ w = w_0 + mz + py - qx. \end{cases}$$

On obtient ainsi les champs qui correspondent à des similitudes de rapport infiniment petit.

2° Supposons maintenant que ρ soit du premier degré. Par un choix convenable des axes, on peut faire en sorte que l'on ait

$$\rho = 2Az,$$

A désignant une constante arbitraire. En raisonnant comme plus haut, on obtient comme intégrale générale

$$(256) \qquad \begin{cases} u = u_0 + qz - ry + 2Axz, \\ v = v_0 + rx - pz + 2Ayz, \\ w = w_0 + py - qx - A(x^2 + y^2 - z^2). \end{cases}$$

Ce champ est obtenu en composant un champ de moments avec un champ de la forme

$$(257) \qquad \begin{cases} u = 2Axz, \\ v = 2Ayz, \\ w = A(z^2 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Ce dernier champ est de révolution autour de l'axe Oz. Menons un plan méridien quelconque et soit Or sa trace sur le plan xOy. Le vecteur du champ en chaque point de ce plan y est tout entier contenu. Exprimons-le par ses composantes s, w dans le système Or, Oz. Nous aurons

$$(258) \qquad \begin{cases} s = 2Arz, \\ w = A(z^2 - r^2). \end{cases}$$

Les deux solutions ainsi obtenues se distinguent essentiellement par la propriété suivante : la première seule est susceptible de donner naissance à un *groupe continu* de transformations finies qui conservent les angles.

Pour établir ce fait nous rappellerons d'abord le résultat suivant, pour la démonstration duquel nous renverrons le lecteur au traité d'analyse de M. Goursat [1] :

Tout groupe continu à un paramètre, qui renferme la transformation identique, se déduit d'une transformation infinitésimale, associée à un champ vectoriel u, v, w, en intégrant les équations

$$(259) \qquad \frac{dX}{u(X, Y, Z)} = \frac{dY}{v(X, Y, Z)} = \frac{dZ}{w(X, Y, Z)} = dt.$$

Ce résultat est facile à interpréter géométriquement. Les équations (259) donnent à chaque instant t le champ des vitesses aux divers points d'un milieu fluide dont la configuration varie avec t. On suppose en outre qu'en un point déterminé, le vecteur vitesse de l'élément matériel qui y passe est toujours le même, autrement dit que le mouvement est *permanent*.

Soient

$$(260) \qquad \begin{cases} X = f(x, y, z, t), \\ Y = g(x, y, z, t), \\ Z = h(x, y, z, t) \end{cases}$$

(1) *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, n° 398. Tout ce qui est essentiel pour la compréhension est d'ailleurs indiqué ici-même.

les intégrales du système (259) qui pour $t=0$ se réduisent respectivement à x, y, z Le caractère permanent du mouvement exige que les relations (260) entraînent

$$(261)\quad \begin{cases} f(X, Y, Z, T) = f(x, y, z, t+T), \\ g(X, Y, Z, T) = g(x, y, z, t+T), \\ h(X, Y, Z, T) = h(x, y, z, t+T). \end{cases}$$

C'est dire qu'en composant la transformation qui correspond à la valeur t du paramètre et celle qui correspond à la valeur T, on retombe sur un individu de la famille (260), correspondant à la valeur $t+T$. Les transformations ainsi obtenues formeront donc bien un groupe.

Considérons d'abord le cas où l'on donne à u, v, w les expressions (255). Par un changement de coordonnées, qui consistera à prendre pour origine le point où u, v, w s'annulent et pour axe Ox une droite parallèle au vecteur p, q, r, nous pourron toujours nous ramener au cas où l'on aurait

$$u = mx, \qquad v = my - pz, \qquad w = mz + py,$$

et nous aurons à intégrer le système

$$(262)\quad \frac{dX}{mX} = \frac{dY}{mY - pZ} = \frac{dZ}{mZ + pY} = dt.$$

L'intégrale telle que X, Y, Z se réduisent respectivement à x, y, z pour $t=0$ peut s'écrire

$$(263)\quad \begin{cases} X = xe^{mt}, \\ Y = e^{mt}(y\cos pt - z\sin pt), \\ Z = e^{mt}(y\sin pt + z\cos pt). \end{cases}$$

Les transformations obtenues de la sorte sont des similitudes. Elles conservent donc les angles.

Prenons au contraire pour u, v, w les valeurs (257) où nous ferons $A=1$. En utilisant la forme (258), le système à intégrer pourra encore s'écrire

$$(264)\quad \begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = 2RZ, \\ \dfrac{dZ}{dt} = Z^2 - R^2. \end{cases}$$

Pour intégrer rapidement, considérons la variable complexe $Z + iR$. Le système précédent peut s'écrire

$$\frac{d(Z+iR)}{dt} = (Z+iR)^2.$$

En intégrant, nous aurons

$$\frac{1}{z+ir} - \frac{1}{Z+iR} = t,$$

d'où

$$Z + iR = \frac{z+ir}{1 - t(z+ir)}.$$

Le groupe de transformations est donc obtenu, à l'aide des formules

$$Z = \frac{z(1 - tz) - t^2r^2}{(1 - tz)^2 + t^2r^2},$$

$$R = \frac{r}{(1 - tz)^2 + t^2r^2},$$

ou enfin, sous forme définitive,

$$(265) \quad \begin{cases} X = \dfrac{x}{1 - 2tz + t^2(x^2 + y^2 + z^2)}, \\ Y = \dfrac{y}{1 - 2tz + t^2(x^2 + y^2 + z^2)}, \\ Z = \dfrac{z - tz^2 - t^2(x^2 + y^2)}{1 - 2tz + t^2(x^2 + y^2 + z^2)}, \end{cases}$$

et cependant, cette transformation ne conserve pas les angles : on peut remarquer par exemple immédiatement qu'aux plans $X = \text{const.}$ et $Y = \text{const.}$ correspondent dans cette transformation des sphères qui ne se rencontrent pas à angle droit.

Le résultat annoncé est donc établi.

178. Cas de deux dimensions. — Gardons les mêmes notations, en remarquant que chaque vecteur n'a désormais que deux composantes u et v. Les conditions à exprimer sont alors

$$(266) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

En éliminant v, on voit qu'on peut prendre pour u une solution quelconque de l'équation

$$(267) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_2 u = 0.$$

Inversement, soit u une solution de l'équation (267). On en déduit v à une constante près, à l'aide des deux équations compatibles

$$(268) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

ou, si l'on préfère, en intégrant la différentielle totale

$$\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx,$$

dont la relation (267) constitue précisément la condition d'intégrabilité.

Le degré de généralité de la solution est donc beaucoup plus étendu que dans le cas précédent.

C'est là un résultat qu'aucun mode de résolution intrinsèque, basé sur l'emploi d'opérateurs ayant une signification indépendante du nombre des dimensions, ne pouvait faire prévoir.

Il est donc établi que le calcul vectoriel est impuissant, à lui seul, à donner la solution de tous les problèmes, et qu'il est nécessaire, dans certains cas, de revenir aux composantes.

Pour clore l'étude de ce problème, nous ferons remarquer que les équations (266) sont aussi celles qui expriment que $u+iv$ est une fonction analytique de $x+iy$. Nous nous bornerons à cette indication, dont le développement fait à lui seul l'objet d'un important chapitre, au début du tome II du *Cours d'Analyse* de M. Goursat.

Signalons enfin que le groupe continu qu'on obtient en intégrant le système

$$\frac{dX}{u(X, Y)} = \frac{dY}{v(X, Y)} = dt$$

(on prendra comme variable $u+iv$) est formé de transformations finies conservant les angles.

179. Champs irrotationnels. — On dit qu'un champ vectoriel $\mathbf{V}(M)$ est *irrotationnel*, lorsqu'on a en tout point M de ce champ

$$\text{(269)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0.$$

Appelons toujours u, v, w les trois composantes de $\mathbf{V}$. La condition (269) équivaut aux trois suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

qui expriment que

$$udx + vdy + wdz = \mathbf{V}.dM$$

est la différentielle totale d'une certaine fonction $F(M) = f(x, y, z)$, ou encore que l'on a

$$\text{(270)} \qquad \mathbf{V} = \operatorname{grad} F(M).$$

Cette condition est nécessaire; elle est aussi suffisante, car nous avons déjà établi [égalité (224)] que l'on a

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} F(M) = 0.$$

Dans un tel champ, on donne le nom de *surfaces de niveau* aux surfaces qui ont pour équation

$$F(M) = C,$$

en désignant par C une constante quelconque. Soit $f(x, y, z)$ l'expression analytique de $F(M)$. L'équation (270) équivaut aux trois suivantes :

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

En chaque point d'une surface de niveau, il passe une ligne de champ, et la tangente à cette ligne a pour paramètres directeurs u, v, w, ou, en vertu des relations précédentes, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Dans un champ irrotationnel, c'est-à-dire dans un champ obtenu en prenant le gradient d'un certain champ scalaire, les lignes de forces sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de ce dernier champ.

180. Potentiel scalaire. — Lorsqu'un champ de vecteurs est irrotationnel, nous avons établi la possibilité de le déduire d'un certain champ scalaire F(M), par une relation de la forme (270). On donne le nom de *potentiel scalaire* à la fonction — F(M).

Signalons dès à présent qu'un champ de vecteurs qui est irrotationnel et uniforme peut prendre naissance, dans certains cas, à partir du potentiel non uniforme. Par exemple, de la fonction non uniforme

$$\text{(271)} \qquad F(M) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

dérive le champ qui a pour composantes

$$\text{(272)} \qquad u = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad w = 0.$$

Nous reviendrons sur les cas analogues et en donnerons l'explication, en faisant l'étude des relations intégrales dans les champs.

181. Champs à divergence nulle. Potentiel vecteur. — Ainsi que nous l'avons vu déjà [égalité (230)] la relation

$$\text{(273)} \qquad \mathbf{V}(M) = \mathbf{rot}\,\mathbf{U}(M)$$

entraîne

$$\text{(274)} \qquad \operatorname{div}\mathbf{V}(M) = 0.$$

Réciproquement, considérons un champ vectoriel satisfaisant à la condition (274). On peut, et d'une infinité de manières, déterminer un autre champ vectoriel **U**(M), lié au champ donné **V**(M) par la relation (274).

Nous subdiviserons la démonstration en deux parties :

1° *S'il existe un champ* $\mathfrak{U}$(M) *répondant à la question, il en existe une infinité* : en effet, si nous avons

$$\mathbf{rot}\,\mathfrak{U}(M) = \mathbf{V}(M),$$

nous aurons aussi

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{U}(M) = \mathbf{V}(M),$$

pourvu que l'on ait

$$\mathbf{rot}[\mathfrak{U}(M) - \mathbf{U}(M)] = 0,$$

ou encore que l'on ait, en désignant par φ une fonction scalaire quelconque de M :

$$\text{(275)} \qquad \mathbf{U}(M) = \mathfrak{U}(M) + \mathbf{grad}\,\varphi.$$

2° *On peut trouver un champ particulier* $\mathfrak{U}(M)$, *tel qu'on ait*

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{U}(M) = \mathbf{V}(M),$$

et, dans ces conditions, le problème admet une infinité de solutions données par la formule (275).

Montrons par exemple qu'on trouvera par quadratures une solution particulière, en imposant à tous les vecteurs $\mathfrak{U}(M)$ *d'être parallèles à un plan fixe*. Si nous prenons ce plan pour plan des xy, un vecteur $\mathfrak{U}$ aura pour composantes $\mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{U}_y$, 0 : en appelant V_x, V_y, V_z celles du vecteur $\mathbf{V}(M)$, les deux seules fonctions inconnues $\mathfrak{U}_x$ et $\mathfrak{U}_y$ seront assujetties aux trois conditions suivantes :

$$(276)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial z} = V_x, \\[2mm] \dfrac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial z} = V_y, \\[2mm] \dfrac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial y} = V_z. \end{cases}$$

En désignant par $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ les fonctions auxquelles se réduisent respectivement $\mathfrak{U}_x$ et $\mathfrak{U}_y$ pour $z = 0$, nous aurons, en vertu des deux premières équations (276),

$$(277)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_x = \displaystyle\int_0^z V_y(x, y, z)\,dz + \varphi(x, y), \\[2mm] \mathfrak{U}_y = -\displaystyle\int_0^z V_x(x, y, z)\,dz + \psi(x, y), \end{cases}$$

sous la réserve de satisfaire à la troisième équation du système précédent. Elle prend la forme

$$V_z = -\int_0^z \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) dz + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_0^z \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dz + f(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

en appelant $f(x, y)$ la fonction $V_z(x, y, 0)$. En vertu de la condition (274), vérifiée par hypothèse, le terme intégral est nul, et nous sommes ramenés à trouver deux fonctions φ et ψ, liées par la relation

$$(278)\qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ étant une fonction bien déterminée. Un tel problème admet une infinité de solutions.

Le résultat annoncé est donc démontré.

On donne à la fonction — V le nom de potentiel vecteur.

182. Champs irrotationnels et à divergence nulle. Fonctions harmoniques. — Cherchons, pour illustrer cette théorie, quels sont les champs

qui participent à la fois des deux caractères précédents, c'est-à-dire les champs $\mathbf{V}(M)$ tels qu'on ait à la fois

$$\text{(279)} \qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{V}(M) = 0,$$

$$\text{(280)} \qquad \operatorname{div}\mathbf{V}(M) = 0.$$

L'équation (279) nous montre d'abord la possibilité d'écrire

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{grad}\,F(M);$$

cela nous ramène donc à la recherche des fonctions $F(M)$ qui satisfont à la condition

$$\text{(281)} \qquad \operatorname{div}\mathbf{grad}\,F(M) = 0,$$

ou, d'après l'égalité (229), à la recherche des fonctions qui vérifient l'équation de Laplace

$$\text{(282)} \qquad \Delta_2 F = 0.$$

On appelle *fonction harmonique* toute solution de cette équation, qui, à l'intérieur d'un certain domaine (domaine d'harmonicité), est continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. L'importance que nous conférons à cette hypothèse, en la cataloguant sous la rubrique *harmonicité*, est justifiée par les importantes conséquences qui en découlent. Signalons seulement qu'une fonction ne peut être harmonique dans un domaine sans être, par le fait même, développable en série de Taylor autour de tout point strictement intérieur à ce domaine : harmonicité entraîne donc analycité. Nous admettrons ce point [1].

183. Fonctions harmoniques particulières. — Considérons l'équation de Laplace

$$\text{(283)} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Cette équation a une signification métrique invariante. Cela nous amène donc à chercher les solutions de la forme $f(r)$, en appelant r la distance du point d'évaluation de la fonction à un point fixe quelconque que nous prendrons pour origine. En remarquant que les dérivées partielles de r sont $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, nous aurons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = f'(r)\frac{z}{r},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + \frac{f'(r)}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right), \text{ etc....}$$

En définitive, nous aurons

$$\Delta_2\varphi = f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + \frac{f'(r)}{r}\left(3 - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r),$$

et la fonction $f(r)$ devra satisfaire à l'équation différentielle

$$rf''(r) + 2f'(r) = 0,$$

(1) Pour le développement de cette théorie, voir le *Cours d'Analyse mathématique* de M. Édouard Goursat, tome III, chap. XXVII et XXVIII.

qui s'intègre immédiatement et donne

$$r^2 f'(r) = -a,$$

en appelant a une constante. Une nouvelle intégration donne la solution générale cherchée

$$f(r) = \frac{a}{r} + b. \tag{284}$$

Nous obtenons ainsi une solution qui dépend paramétriquement du point O, et qu'on appelle la *solution fondamentale relative au pôle* O. Cette solution est harmonique dans tout l'espace, sauf au pôle.

Remarquons maintenant que l'équation (283) est linéaire. Par conséquent, si des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ vérifient cette équation, il en sera de même de la fonction

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_n\varphi_n.$$

Par exemple, la fonction

$$\frac{C_1}{O_1M} + \frac{C_2}{O_2M} + \ldots + \frac{C_n}{O_nM}, \tag{285}$$

dans l'expression de laquelle $O_1, O_2, \ldots, O_n$ désignent n points fixes est harmonique en tout point M, sauf aux n pôles $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Généralisons ce procédé de formation, et faisons appel à un passage à la limite. Nous obtenons les potentiels de lignes, de surfaces, ou de volumes, exprimés respectivement par les intégrales

$$\int_C \frac{\rho(O)}{OM}\, ds_0, \qquad \int_S \frac{\rho(O)}{OM}\, d\sigma_0, \qquad \int_V \frac{\rho(O)}{OM}\, d\omega_0, \tag{286}$$

où ds_0, $d\sigma_0$, $d\omega_0$ désignent respectivement l'élément de longueur, de surface, ou de volume qui avoisine le point O. Une démonstration que nous ne donnerons pas ici permet d'établir rigoureusement que les trois intégrales précédentes représentent des fonctions du point M qui sont harmoniques en dehors de la ligne, de la surface, ou du volume d'intégration.

En particularisant le sens général que nous avons indiqué pour le terme *potentiel*, on dit souvent que les intégrales précédentes sont des *potentiels* : avec plus de précision, on peut dire que l'expression (285) est le potentiel d'un système de points isolés, que les intégrales ci-dessus sont les évaluations respectives des potentiels d'une ligne, d'une surface et d'un volume. Dans l'expression (285) figurent n coefficients arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$, qui sont les *masses* des points potentiants $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Ils sont remplacés, dans les intégrales (286), par les fonctions $\rho(O)$ donnant la densité des masses, qui, au lieu d'être concentrées en des points isolés, sont maintenant réparties d'une manière continue : $\rho(O)$ désigne, dans la première intégrale, une densité linéaire; dans la seconde, une densité superficielle; dans la troisième, une densité spatiale.

Signalons en outre que l'extension progressive du domaine d'intégration, sans faire disparaître les singularités, a pour effet de les atténuer. Par exemple, au voisi-

nage d'une masse potentiante isolée O, le potentiel croît indéfiniment : il a pour expression $\frac{a}{\mathrm{OM}}$ si cette masse O est unique. S'il y a d'autres masses (séparées de la première), en un point infiniment voisin de la masse a placée en O, le potentiel est un infiniment grand équivalent à $\frac{a}{\mathrm{OM}}$. On démontre alors la possibilité de le mettre sous la forme

$$\frac{a}{\mathrm{OM}} + \mathrm{F(M)},$$

F (M) étant développable en série autour du point O. Une masse isolée (et finie) produit donc un potentiel qui est infini de l'ordre de $\frac{1}{r}$.

Soient maintenant une ligne potentiante, C une portion de cette ligne. On peut démontrer que lorsque M s'approche indéfiniment d'un point P de cette ligne (où la densité ρ n'est pas nulle), l'intégrale

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\rho(\mathrm{O})}{\mathrm{OM}}\, ds_0$$

augmente indéfiniment : mais la croissance est ici moins rapide que précédemment. En supposant que PM soit orthogonal en P à la courbe, cette croissance est d'ordre comparable au logarithme de la distance PM.

Pour vérifier cette affirmation sur un exemple, considérons le cas où l'arc C se réduit à un segment de droite AB, de longueur $2l$, et où le point M se projette orthogonalement au milieu P de ce segment; si en outre la densité ρ (O) est égale à 1, en tout point de AB, le potentiel en M aura pour valeur

$$(287) \qquad \mathrm{V_M} = 2\int_0^l \frac{dz}{\sqrt{\delta^2 + z^2}},$$

en désignant par z la mesure algébrique de PO et par δ la distance PM. Finalement, nous aurons donc

$$(288) \qquad \mathrm{V_M} = 2\mathrm{L}\frac{p}{\delta},$$

en appelant p le demi-périmètre du triangle MAB. Lorsque δ tend vers zéro, elle croît indéfiniment comme la quantité $2\,\mathrm{L}\,\frac{1}{\delta}$.

Dans le cas d'une répartition continue de masses sur une portion de surface S, l'intégrale

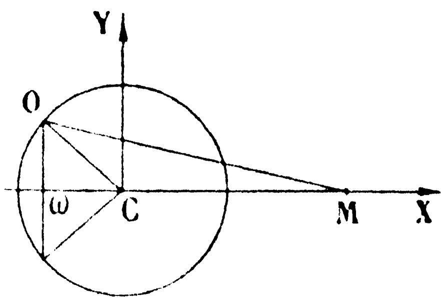
$$(289) \qquad \int_{\mathrm{S}} \frac{\rho(\mathrm{O})}{\mathrm{OM}}\, d\sigma_0$$

reste finie lorsque M tend vers un point P de la surface. On démontre même que cette fonction est continue en chaque point P de cette surface. Toutefois, et ceci montre qu'il subsiste une singularité, la dérivée normale est discontinue en ces

mêmes points. Admettons encore ce théorème général, et bornons-nous à en vérifier l'énoncé sur un exemple.

Supposons que S soit constituée par la totalité d'une sphère et que la densité ρ soit égale à 1 en tout point de cette sphère. Le potentiel en M dépend alors uniquement de la distance r du point M au centre C de la sphère. D'après un résultat précédemment obtenu, il a donc pour expression

$$\frac{a}{r}+b \qquad \text{ou} \qquad \frac{a_1}{r}+b_1,$$



en désignant par a, b, a_1, b_1 certaines constantes, suivant qu'on se place à l'extérieur ou à l'intérieur de la sphère.

Supposons d'abord que M soit à l'extérieur de la sphère : le potentiel tend vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment [1] : donc on a nécessairement $b=0$, et le potentiel est de la forme $\frac{a}{r}$.

Par contre, si M est à l'intérieur de cette sphère, le potentiel se réduit nécessairement à b_1, car si a_1 n'était pas nul, ce potentiel serait singulier en C, ce qui ne peut être, puisqu'il n'y a pas de masse en ce point.

Sans faire de calcul, nous établissons ainsi qu'il faudra recourir à deux fonctions bien distinctes pour exprimer le potentiel de part et d'autre de la sphère S.

Abordons maintenant le calcul direct : partageons la sphère en zones élémentaires ayant pour axe commun le diamètre de M. L'une de ces zones, d'abscisse moyenne $\overline{C\omega}=x$, a pour surface $2\pi R\,dx$ (l'axe des abscisses, soit CX, est la droite CM, en direction et sens). Le potentiel en M des masses réparties sur cette zone a pour valeur

$$(290) \qquad dV=\frac{2\pi R\,dx}{\sqrt{R^2+r^2-2rx}},$$

et le potentiel total est l'intégrale

$$(291) \qquad 2\pi R\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{\sqrt{R^2+r^2-2rx}}=-\frac{2\pi R}{r}\left[\sqrt{R^2+r^2-2rx}\right]_{-R}^{+R}$$
$$=\frac{2\pi R}{r}\left[R+r-|R-r|\right]$$

[ne jamais oublier que la racine carrée de m^2 est $|m|$]. La présence du symbole valeur absolue nous oblige à écrire pour cette intégrale deux expressions différentes, suivant que r est $< R$ ou $> R$.

Supposons d'abord que M soit extérieur à la sphère, auquel cas r surpasse R. Nous trouvons pour valeur du potentiel

$$(292) \qquad V=\frac{4\pi R^2}{r},$$

c'est-à-dire même valeur que si la masse potentiante, au lieu d'être répartie uniformément sur la sphère, était concentrée en son centre.

(1) Chacune des intégrales (286) tend vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment, si l'on suppose tout au moins que la ligne, la surface ou le volume d'intégration sont tout entiers à distance finie.

Si M est intérieur à la sphère, r est moindre que R. Nous trouvons pour le potentiel la valeur constante $4\pi R$.

On peut remarquer que si M tend vers un point P de la surface de la sphère, la première expression (si M est à l'extérieur) et la seconde (si M est à l'intérieur) tendent vers une limite commune : il y a donc bien continuité du potentiel étudié sur la sphère.

Par contre, prenons la dérivée normale, c'est-à-dire ici la dérivée suivant le rayon (nous prendrons le sens de la normale extérieure). En un point intérieur à la sphère, cette dérivée est nulle. En un point extérieur et infiniment voisin de P, elle tend vers -4π. Elle éprouve bien ainsi, au passage de la sphère, une discontinuité.

Il nous reste à examiner le cas d'une distribution continue des masses, à l'intérieur d'un certain volume. On établit alors que si le point M est situé à l'intérieur de ce volume, l'intégrale

$$F(M) = \int_V \frac{\rho(O)\, d\omega_0}{OM} \tag{293}$$

représente une fonction continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres (pourvu que la fonction ρ admette en chaque point du volume V des dérivées premières continues) : mais cette fonction cesse d'être harmonique. Elle satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta_2 F = -4\pi\rho. \tag{294}$$

Vérifions encore cet énoncé sur un exemple : nous supposerons que les masses potentiantes sont réparties uniformément, avec une densité spatiale égale à l'unité, à l'intérieur d'une sphère. Imaginons que l'on ait subdivisé cette sphère en couches concentriques, d'épaisseur infiniment petite. Celles de ces couches qui laissent à leur extérieur le point M y produiront le même potentiel que si toute la masse potentiante qu'elles supportent était condensée au centre de la sphère.

Dans le cas où M est extérieur à la sphère, cette remarque nous fournit immédiatement la solution du problème : si nous continuons à appeler r la distance CM, le potentiel en M sera

$$F(M) = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{r}, \tag{295}$$

car la masse totale condensée au centre est ici égale au volume de la sphère.

Supposons maintenant que M soit intérieur à la sphère. Nous subdiviserons les couches sphériques élémentaires en deux catégories :

1° celles qui laissent M à leur extérieur; elles produisent en M le potentiel total

$$\frac{4}{3}\pi r^2;$$

2° celles qui enveloppent le point M. Considérons celle qui a pour rayon moyen λ et pour épaisseur $d\lambda$: la masse potentiante correspondante est $4\pi\lambda^2 d\lambda$, le potentiel qu'elle engendre s'obtient en divisant par le rayon de la couche, ce qui donne $4\pi\lambda d\lambda$. Le potentiel total des couches enveloppantes est donc

$$\int_r^R 4\pi\lambda\, d\lambda = 2\pi(R^2 - r^2).$$

La valeur totale du potentiel en un point M intérieur à la sphère est donc

$$F(M) = \frac{4}{3}\pi r^2 + 2\pi(R^2 - r^2) = 2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r^2. \tag{296}$$

Ici encore, nous aurons donc deux expressions distinctes pour le potentiel extérieur et le potentiel intérieur. On remarque facilement que ce dernier satisfait bien à l'équation

$$\Delta_2 F = -4\pi\rho$$

(le second membre se réduit ici à -4π).

Dans un ordre d'idées différent, on peut déduire de la solution fondamentale

$$\frac{1}{\overline{OM}},$$

grâce à la présence du point paramétrique O, de nouvelles solutions de l'équation de Laplace. Soit O' un point infiniment voisin de O. La fonction $\frac{1}{\overline{O'M}}$ est aussi une solution, et, par suite, il en est de même de la fonction

$$\frac{1}{\overline{OO'}}\left(\frac{1}{\overline{O'M}} - \frac{1}{\overline{OM}}\right)$$

et de sa limite quand O' tend vers O, dans une certaine direction caractérisée par le vecteur unité **u**. Cette limite n'est autre que la dérivée de $\frac{1}{\overline{OM}}$ *par rapport au point* O, dans cette direction; sa valeur est donc, en vertu de la formule (179),

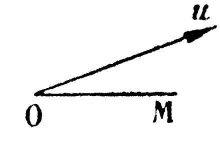
$$(297) \qquad \mathbf{u}.\mathbf{grad}_0 \frac{1}{\overline{OM}} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{MO}.\mathbf{u} = \frac{1}{r^3}\mathbf{OM}.\mathbf{u} = \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

où φ désigne l'angle $(\widehat{OM, Ou})$.

Nous obtenons donc une nouvelle solution de l'équation de Laplace en prenant

$$F(M) = \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

où r désigne toujours la distance du point M à un point fixe O, et φ l'angle de OM avec une direction fixe Ou.



De cette nouvelle solution, qui est harmonique sauf au point O, on peut déduire en intégrant le long d'une ligne, d'une surface, ou d'un volume, de nouvelles solutions de l'équation de Laplace, qui sont des potentiels généralisés.

Contentons-nous de dire quelques mots du cas où l'on intègre le long d'une surface et où l'on prend, en chaque point O de celle-ci, pour direction Ou celle de la normale à cette surface. Considérons une densité $\rho(O)$, qui soit fonction continue du point O sur cette surface, et envisageons l'intégrale

$$(298) \qquad F(M) = \int_S \frac{\rho(O)\cos(Ou, OM)}{\overline{OM}^2} d\sigma_0.$$

On donne à cette intégrale le nom de *potentiel de double couche* [1]. On démontre

(1) Par opposition à la seconde des intégrales (286), appelée potentiel de simple couche ou potentiel d'une distribution électrique superficielle. L'intégrale (298) peut être regardée comme le potentiel d'une suite continue de petits aimants, à pôles O, O' très rapprochés, implantés perpendiculairement à S.

qu'en dehors de la surface S elle représente une fonction harmonique du point M : on établit en outre que si M traverse la surface S en un point P de celle-ci, la fonction F(M) éprouve une discontinuité.

Bornons-nous encore à donner un exemple mettant en évidence cette discontinuité. Examinons le cas où l'on aurait $\rho = 1$ en chaque point de la surface S. L'intégrale précédente prend alors une signification remarquable : chacun de ses éléments, provenant d'une portion infinitésimale $d\sigma$ de la surface S, représente l'aire découpée sur la sphère de centre M et de rayon 1 par le cône qui a pour sommet M et pour directrice le contour de $d\sigma$. L'intégrale représente alors l'angle solide total sous lequel la portion S de surface considérée est vue du point M.

C'est du moins le résultat qu'on obtient immédiatement lorsque chaque droite issue de M rencontre S en un point au plus. Tous les éléments de l'intégrale sont alors de même signe, car un changement de signe ne peut se produire que si cos φ s'annule, c'est-à-dire si le rayon vecteur MO devient tangent en O à la surface S. Lorsque cette circonstance se produit, on peut considérer les régions délimitées sur S par les courbes de contour apparent du cône circonscrit de sommet M : chacune de ces régions sera vue du point M sous un angle solide qui sera affecté d'un signe, et l'intégrale proposée sera la somme algébrique des angles solides sous lesquels sont vues ces différentes régions. Supposons en particulier que S soit une surface fermée, analogue à une sphère, à un ellipsoïde (c'est-à-dire réductible à une de ces figures par déformation continue). Une telle surface divise l'espace en deux régions : si M est à l'intérieur, l'intégrale proposée aura pour valeur 4π. Si M est à l'extérieur, sa valeur sera zéro, en vertu de l'opposition des valeurs algébriques des angles correspondant aux différentes régions, lesquelles se réduisent à deux si la surface est convexe. Cet exemple montre clairement la discontinuité dont nous avons parlé.

Pour terminer ces indications relativement à des fonctions harmoniques particulières, faisons remarquer qu'on peut se proposer de rechercher les solutions de l'équation de Laplace *qui restent constantes le long des droites parallèles à une même direction* Z. En prenant un système de coordonnées orthogonales et normales, dont l'axe des z soit parallèle à cette direction, nous serons amenés à chercher les fonctions φ de deux variables x et y, vérifiant l'équation de Laplace à deux dimensions

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{299}$$

Au sujet de cette équation, nous pourrons reprendre entièrement les idées précédentes en cherchant d'abord une solution fondamentale : comme solution fondamentale de pôle O, nous obtiendrons ici la fonction

$$\log \frac{1}{Om},$$

en désignant par m la projection de M (point quelconque de l'espace) sur le plan mené par O perpendiculairement à la direction Z. Dans l'espace à trois dimensions, cette fonction du point M présente une ligne singulière, à savoir la parallèle menée par O à Z. Au moyen de cette solution fondamentale, on pourra construire, en géométrie plane, des potentiels logarithmiques, qui sont des fonctions harmoniques, en dehors du domaine de répartition des masses potentiantes; suivant que ce domaine

est un arc de courbe C ou bien l'aire S d'une portion du plan, nous obtiendrons ainsi des intégrales

$$\int_C \rho(0)\log\frac{1}{0m}\,ds_0 \qquad \text{et} \qquad \int_S \rho(0)\log\frac{1}{0m}\,d\sigma_0,$$

qu'il est facile d'évaluer en supposant par exemple que ρ soit égal à 1 et que C soit une circonférence ou S l'aire d'un cercle. Ces intégrales présentent des caractères analogues à ceux que nous avons indiqués pour les intégrales correspondantes de l'espace. La première est continue pour toutes les positions de m, y compris pour celles qui sont confondues avec des points de la courbe C. Toutefois, le long de cette courbe, il y a discontinuité de la dérivée normale. La seconde représente, moyennant certaines conditions de dérivabilité de $\rho(0)$, une fonction continue, même lorsque le point m est à l'intérieur de S, mais alors cette fonction n'est plus harmonique : son laplacien à deux dimensions a pour valeur $-2\pi\rho$.

De la solution fondamentale, dérivée par rapport à O suivant un vecteur **Ou** (du plan des xy), on déduit encore la solution $\frac{\cos\varphi}{r}$ en posant $\varphi = \widehat{Om, Ou}$, d'où l'on peut passer au potentiel logarithmique de double couche

$$\int_C \rho\frac{\cos\varphi}{r}\,ds,$$

lequel offre aussi une discontinuité lorsque le point m traverse la courbe (C). Lorsque ρ est égal à 1, cette intégrale représente d'ailleurs l'angle sous lequel cette courbe est vue du point m. Il en est du moins ainsi lorsque chaque demi-droite issue de m rencontre C en un point au plus. Sinon, il faut partager C en régions satisfaisant à la restriction précédente : l'intégrale est alors la somme algébrique des angles, pris alternativement, de région en région, avec les signes + et —, sous lesquels les divers tronçons de courbe sont vus du point m. Si C est une courbe fermée sans point multiple, l'intégrale est égale à 2π si m est à l'intérieur, et à zéro si m est à l'extérieur.

184. Champs particuliers, en connexion avec la théorie des transformations finies. — A partir du point de vue que nous avons développé au nº 173, on peut se proposer sur les champs vectoriels certaines recherches qui équivalent à des problèmes de la théorie des transformations finies.

Considérons encore un couple M, M' de points correspondants, et prenons, pour ce couple, la transformation linéaire tangente. Nous avons établi au nº 160 qu'on peut la considérer comme résultant d'une translation, d'une rotation et d'une transformation autométrique. Il s'agit ici d'ailleurs d'une véritable composition de transformations, et non, comme dans le cas infinitésimal, d'une addition géométrique.

Cela posé, nous sommes conduits à nous poser les problèmes suivants :

1º Trouver les champs qui définissent une transformation pour laquelle il y a contact, pour chaque couple de points, avec un déplacement (la transformation autométrique citée plus haut se réduisant à la transformation identique).

2º Trouver les champs auxquels correspond une transformation tangente, en chaque couple de points, à une similitude (la transformation autométrique se réduisant à une homothétie).

3° Trouver les champs auxquels correspond une transformation tangente, en chaque couple de points, à une transformation autométrique.

Le troisième problème se résout immédiatement en exprimant la symétrie du tableau

$$\begin{matrix} 1+\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial g}{\partial x} & 1+\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}, \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & 1+\frac{\partial h}{\partial z} \end{matrix}$$

par rapport à sa diagonale principale : il faut et il suffit pour cela que f, g, h soient les dérivées partielles d'une même fonction. On obtient donc le même résultat dans l'étude du problème considéré, qu'on se place au point de vue des transformations finies ou des transformations infiniment petites. Dans un cas comme dans l'autre, pour que la transformation linéaire tangente soit autométrique, il faut et il suffit que le vecteur (f, g, h) soit le gradient d'un certain champ scalaire.

Passons maintenant à l'étude des deux premières questions, dans l'ordre précédent.

185. Transformations conservant les longueurs. — Il s'agit d'exprimer que, pour chaque couple de points correspondants, la transformation linéaire tangente se réduit à un déplacement.

Reprenons les équations (239 *bis*) qui définissent cette transformation, et auxquelles on peut donner la forme

$$(300)\qquad \begin{cases} dx' = dx\left[1+\frac{\partial f}{\partial x}\right] + dy\frac{\partial f}{\partial y} + dz\frac{\partial f}{\partial z}, \\ dy' = dx\frac{\partial g}{\partial x} + dy\left[1+\frac{\partial g}{\partial y}\right] + dz\frac{\partial g}{\partial z}, \\ dz' = dx\frac{\partial h}{\partial x} + dy\frac{\partial h}{\partial y} + dz\left[1+\frac{\partial h}{\partial z}\right]. \end{cases}$$

Tout revient à écrire que l'on a

$$(301)\qquad dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

c'est-à-dire à traduire l'identité des éléments linéaires dans la correspondance entre les points M et M'. Cette identité entraîne la conséquence suivante : si M décrit un arc de courbe quelconque, son transformé M' décrit un arc de même longueur. Supposons en particulier que M décrive une portion de droite, et remarquons que *la longueur de cette dernière réalise le minimum* (*absolu*) *de la longueur d'une courbe quelconque joignant les extrémités du segment considéré* (nous exprimons ici une conséquence pure et simple des prémisses utilisées dans la construction logique de la géométrie métrique : on établirait aisément le fait énoncé en prenant un système orthogonal et normal dont l'un des axes porterait le segment en question). Dans les conditions précédentes, M' décrira lui-même une portion de ligne possédant la même propriété de minimum, c'est-à-dire aussi une portion de droite. Ainsi, à tout segment rectiligne correspondra par la transformation un autre segment rectiligne de même longueur. La conservation des longueurs entrainant celle des angles, à un tétraèdre OABC trirectangle en O, et tel que OA = OB = OC = 1, correspondra un tétraèdre O'A'B'C' trirectangle en O' et tel que O'A' = O'B' = O'C' = 1. Utilisons les systèmes OA, OB, OC d'une part et O'A', O'B', O'C' de l'autre comme systèmes fondamentaux (ils sont orthogonaux et normaux). Soient M et M' deux points correspondants; les égalités simultanées

$$OM = O'M', \qquad \widehat{MOA} = \widehat{M'O'A'}, \qquad \widehat{MOB} = \widehat{M'O'B'}, \qquad \widehat{MOC} = \widehat{M'O'C'}$$

entraînent l'égalité entre les produits scalaires tels que **OA**. **OM** et **O'A'**. **O'M'**, **OB**. **OM** et **O'B'**. **O'M'**, **OC**. **OM** et **O'C'**. **O'M'**, c'est-à-dire entre les trois coordonnées du point M dans le premier système et du point M' dans le second. Le théorème est donc établi.

Les transformations cherchées s'identifient donc avec les transformations métriques. Dans le cas particulier où les deux trièdres OABC et O'A'B'C' sont de même sens, on obtient un déplacement.

186. Transformations conservant les angles. — Dans une telle transformation, la propriété spécifique de la transformation linéaire tangente en un couple arbitraire de points est de se réduire à une similitude. On est donc conduit à remplacer l'équation (301) par la suivante

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{302}$$

en désignant par λ une fonction de x, y, z.

Le degré de généralité de la solution offre un caractère exceptionnel pour la valeur $n = 2$. Dans ce cas, on est conduit à trouver deux fonctions x' et y' de x et de y, satisfaisant aux deux relations

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2, \\ &\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right. \tag{303}$$

qu'on peut écrire avantageusement

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 = 0, \\ &\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions la deuxième équation par $2i$ et ajoutons à la première ; on peut substituer au système précédent l'unique équation

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x} + i\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x} + i\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

ou l'équation équivalente

$$\left[\frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial y} + i\left(\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\right)\right]\left[\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + i\left(\frac{\partial x'}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial x}\right)\right] = 0.$$

On devra donc prendre pour x' et y' deux fonctions vérifiant l'un des systèmes linéaires

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \\ &\frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x}, \end{aligned}\right. \tag{304} \qquad (305)\ \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x'}{\partial x} = -\frac{\partial y'}{\partial y} \\ &\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

qui expriment respectivement que l'une des fonctions $x' + iy'$ ou $x' - iy'$ dépend analytiquement de $x + iy$. Nous nous bornerons à cette simple indication, et nous renverrons pour son développement au cours d'analyse de M. Goursat [1]. Nous ferons remarquer seulement que des deux systèmes précédents, nous avons déjà obtenu le premier lors de la résolution de la même question, dans le domaine des transformations infinitésimales.

Ajoutons que le système (304) possède une signification remarquable. Il exprime

(1) *Cours d'Analyse mathématique*, tome II, chap. XIII, section III.

que les gradients des deux fonctions x' et y du point x, y se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'un droit.

Dans le cas de $n = 3$, les choses se passent d'une manière très différente. Soit une transformation ponctuelle conservant les angles. Un système triple orthogonal, par le jeu de cette transformation, donne naissance à un système de même nature. Cela entraîne la conservation des lignes de courbure, et par suite aussi celle des ombilics. Donc, à une surface dont tous les points sont des ombilics correspondra, par une telle transformation, une autre surface possédant la même propriété.

Ainsi, à une sphère ou à un plan seront associés une sphère ou un plan, le plan pouvant donner une sphère, la sphère étant susceptible de se réduire à un plan. A des sphères (ou plans) se coupant orthogonalement correspondront des sphères (ou plans) se coupant orthogonalement. A un faisceau de sphères (sphères orthogonales à trois sphères ou plans fixes) correspondra un autre faisceau de sphères (ou plans). A ce point de vue, un système de plans parallèles se transformera en un système de même nature ou en un faisceau de sphères, dont deux quelconques fassent entre elles un angle nul, c'est-à-dire en un faisceau de sphères tangentes en un point à un même plan.

La détermination des transformations cherchées s'achève alors aisément. Soit un système triple orthogonal Σ, composé dans chaque famille de plans parallèles. On peut faire deux hypothèses :

1° Le système Σ donne naissance à un autre système Σ', pareillement formé de plans (1). On peut alors rapporter le point M à un trièdre de coordonnées dont les faces soient trois plans empruntés au système Σ, et rapporter de même le point M' à un trièdre dont les faces soient trois plans du système Σ'. Soient x, y, z les coordonnées de M par rapport au premier trièdre, x', y', z' les coordonnées de M' par rapport au second. Les formules de transformation sont du type

$$x' = f(x), \qquad y' = g(y), \qquad z' = h(z).$$

Pour la conservation des angles, il faut que l'on ait, d'après (302),

$$f'(x) = g'(y) = h'(z)$$

quels que soient x, y, z. Soit m la valeur constante de ces trois dérivées. Si on a eu soin de prendre pour sommets des deux trièdres des points correspondants, les formules qui définissent la transformation se réduisent à

$$x' = mx, \qquad y' = my, \qquad z' = mz.$$

Dans ce cas, nous sommes en présence d'une similitude.

2° Le système Σ donne naissance à un autre système Σ' dont une des familles est formée de sphères. Toutes ces sphères sont tangentes en O à un même plan. Les deux autres familles de Σ' sont aussi des sphères passant par O et constituant deux faisceaux analogues. Les trois plans tangents en O aux trois faisceaux forment un trièdre trirectangle. De O comme pôle, faisons une inversion. Le système Σ' se transforme en un système Σ'', dont chaque famille est composée de plans parallèles. On passe de Σ à Σ'' par une similitude, d'après le raisonnement fait plus haut, et de Σ'' à Σ' par l'inversion précédente. Dans ce cas, la transformation est donc composée d'une similitude (susceptible de se réduire à la transformation identique) et d'une inversion.

En résumé, dans l'espace à trois dimensions, les seules transformations conformes sont les similitudes, les inversions et les transformations composées de ces dernières. Le raisonnement précédent établit d'ailleurs qu'en composant un nombre quelconque de ces transformations, la transformation résultante se réduit toujours, sinon à une similitude, du moins à une similitude accompagnée d'une inversion.

(1) Si l'une des familles Σ' est formée de plans, il en est de même des deux autres familles.

VII

Propriétés intégrales. Flux et circulation. Fonctions de lignes et de surfaces. Applications.

187. Généralités. — Jusqu'à présent, nous avons limité l'étude des champs scalaires et vectoriels à celle des propriétés locales. Même en cherchant les champs vectoriels qui, en tout point, satisfont à l'une des conditions

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{V} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0,$$

nous avons été conduits aux formules respectives

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\,\varphi, \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{V} = \mathbf{rot}\,\mathbf{U},$$

φ et $\mathbf{U}$ étant arbitraires; or ces formules sont elles-mêmes d'un caractère local.

Nous allons maintenant aborder un ordre d'idées nouveau, en procédant à l'étude des relations intégrales dans les champs scalaires ou vectoriels. Les intégrales figurant dans ces relations seront étendues à des lignes, à des surfaces ou à des volumes. Elles porteront soit sur des scalaires, soit sur des vecteurs : le second cas peut toujours être ramené au premier, car si nous prenons par exemple l'intégrale de volume

$$\int \mathbf{V}(\mathrm{M})\, d\omega_{\mathrm{M}},$$

où $d\omega_{\mathrm{M}}$ désigne l'élément de volume du point M, cette intégrale représente un vecteur libre dont le produit scalaire par un vecteur fixe $\mathbf{u}$ aura pour valeur

$$\int \mathbf{V}(\mathrm{M}).\,\mathbf{u}\, d\omega_{\mathrm{M}}.$$

En géométrie métrique, on pourra donc toujours se ramener par cette méthode à des intégrales de scalaires. En géométrie linéaire, un résultat analogue s'obtiendrait par l'application, à tous les éléments vectoriels de l'intégrale, d'une forme linéaire invariante (la même pour chaque élément).

L'exposé qui va suivre nous fournira l'occasion de cotoyer deux théories importantes de l'analyse, la géométrie de situation et la théorie des fonctions de lignes (ou de surfaces).

La première, appelée aussi *Analysis situs*, étudie les propriétés des figures indépendantes d'une déformation continue. Elle s'attache à distinguer les lignes ouvertes et les lignes fermées, les surfaces avec ou sans bords. Elle classe ces dernières par ordres croissants de connexion, etc. Les propriétés qu'elle met en jeu sont relatives, le plus souvent, à l'ensemble de la figure étudiée; il est donc naturel de les rencontrer dans les recherches de géométrie intégrale.

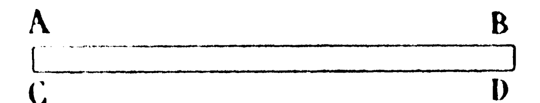
L'autre théorie a pour objet l'étude des quantités variables liées à la donnée arbitraire d'une ligne ou d'une surface. Les premiers exemples de ce genre s'obtiennent

justement à l'aide d'intégrales, considérées comme fonctions de leur domaine d'extension. Ce point de vue est donc, lui aussi, connexe de notre objet actuel.

188. Flux d'un vecteur à travers une surface. — Prenons, pour simplifier, une portion finie de surface S délimitée par un seul contour. Une telle surface peut se déduire, par déformation continue, de l'aire d'un cercle. Elle partage l'espace qui l'avoisine en deux régions I et II. Elle possède deux côtés bien distincts, confinant chacun à l'une de ces régions. Soit un champ vectoriel **V**(M), défini dans la région de l'espace occupée par l'aire S. Faisons encore une hypothèse simplificatrice : sous l'influence de la transformation infinitésimale **V**(M) dt attachée au champ **V**(M) (voir n° 154), tous les points de S effectuent une progression infiniment petite *vers la même région*. Alors cette surface balaie un volume infiniment petit $\Phi\ dt$.

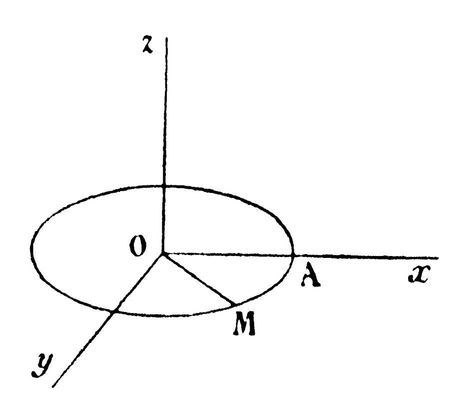
C'est à la quantité scalaire Φ que nous donnerons le nom de *flux* du vecteur **V** *à travers la portion de surface* S. Cette définition est préférable à celle qu'on propose d'ordinaire, parce qu'elle s'applique en géométrie linéaire comme en géométrie métrique.

Dans le cas où tous les points de S ne progressent pas vers la même région, nous supposerons qu'il est possible de diviser cette surface en un nombre fini de portions, *dont l'ensemble constitue une surface ayant deux côtés*, et telles que, pour chacune d'elles, la progression s'opère dans un sens bien déterminé. Nous définirons ainsi des flux partiels, et nous conviendrons par exemple de regarder comme positifs ceux qui correspondent à une progression vers la région I, comme négatifs ceux qui correspondent à une progression vers la région II, et nous ferons la somme algébrique de tous ces flux.





Chemin faisant, nous avons rencontré une hypothèse essentielle : nous avons été obligés de supposer que la totalité de la surface S, pour laquelle nous définissons le flux, est bilatérale. Quelques explications sont ici nécessaires. Imaginons une bande de papier ABCD en forme de rectangle très allongé. La bande ayant été gommée à ses extrémités, AC et BD, soudons celles-ci, mais de manière que C coïncide avec B, A avec D. La surface ainsi obtenue possède la propriété suivante : traçons-y une courbe fermée, équidistante des deux bords, et menons, en un point de cette courbe, le vecteur unité normal à la surface. Étudions la variation continue de ce vecteur lorsque le point décrit la courbe. Il arrivera qu'ayant décrit une fois le périmètre de cette courbe, le vecteur normal en question viendra prendre la position directement opposée à sa position primitive : partant donc d'un point de la surface et ayant fixé en ce point l'orientation de la normale, on peut revenir en ce point, et après avoir déterminé de proche en proche l'orientation des éléments contigus de la surface, retrouver, au point de départ, l'orientation contraire à l'orientation initiale. Il est d'ailleurs facile de construire analytiquement un exemple analogue. Soient Ox, Oy,



Oz trois axes rectangulaires. Traçons dans le plan des xy un cercle de centre O et de rayon 1. Considérons une surface passant par ce cercle et donnons *a priori* la répartition de ses normales le long de ce cercle. Convenons qu'au point M, d'abscisse curviligne $AM = \varphi$, le vecteur unité de la normale ait pour composantes

$$\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi, \qquad \sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi, \qquad \cos\frac{\varphi}{2}.$$

Pour un tour complet sur la circonférence, φ augmentera de 2π, $\frac{\varphi}{2}$ augmentera de π. Nous tomberons donc bien sur le vecteur diamétralement opposé du vecteur initial. Entre autres surfaces admettant le long de C cette distribution de normales, on pourra considérer la développable enveloppe des plans

$$(306) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi + z\cot g\frac{\varphi}{2} - 1 = 0.$$

Nous écarterons systématiquement de telles circonstances de nos raisonnements.

Dans le domaine métrique, on peut ramener l'évaluation du volume $\Phi\,dt$ à celle d'une intégrale étendue à la portion de surface S. Soit ν le vecteur unité de la normale à cette surface, dirigé vers la région I. On peut démontrer rigoureusement que le volume infiniment petit $\Phi\,dt$ est un infiniment petit équivalent à l'intégrale

$$dt\int_S \mathbf{V}(M).\nu\, d\sigma_M.$$

Le flux du vecteur $\mathbf{V}$ à travers la surface S s'exprime donc encore par l'intégrale

$$\int_S \mathbf{V}(M).\nu\, d\sigma_M,$$

dont l'élément différentiel n'est autre que la composante normale du vecteur $\mathbf{V}$.

Nous admettrons qu'il est légitime de transformer ainsi la définition du flux, en nous contentant de faire remarquer le caractère intuitif de la transformation : chaque élément $d\sigma_M$ de S balaie approximativement le volume d'un prisme de base $d\sigma_M$, dont l'arête latérale est vectoriellement $\mathbf{V}(M)\,dt$, de sorte que ce prisme a pour volume $dt\,\mathbf{V}(M).\,\nu\,d\sigma_M$.

Nous allons maintenant montrer que le flux à travers une surface fermée, en supposant que la région I, qui contient le vecteur ν, soit la portion de l'espace extérieure à la surface, est égal à l'intégrale de la divergence du champ, étendue au volume délimité par la surface.

189. Relation entre le flux à travers une surface fermée et la divergence du champ. — Revenons à la première définition du flux, ce qui donnera à nos résultats une généralité plus grande, en montrant qu'ils sont applicables à la géométrie linéaire.

Considérons un domaine connexe Ω, limité par une surface fermée S. A l'intérieur de ce domaine est défini un champ vectoriel $\mathbf{V}(M)$. Considérons le changement de configuration subi par ce domaine sous l'influence de la transformation infinitésimale qui fait correspondre au point M un point M' tel que $\mathbf{MM'} = \mathbf{V}\,dt$. D'après

ce que nous avons vu (n° 158), chaque élément de volume $d\omega_M$ du domaine primitif engendre un nouvel élément dont le volume est

$$[1 + \operatorname{div} \mathbf{V} dt] d\omega_M,$$

si bien qu'après le changement de configuration, le volume du domaine initial s'est accru de

$$dt \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{V} d\omega_M.$$

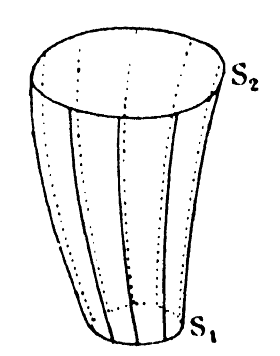
D'autre part, il s'est également accru, d'après la définition du flux Φ, de $\Phi\, dt$. Nous avons donc la relation

$$\Phi = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{V} d\omega_M. \qquad (307)$$

Il faut noter que ce raisonnement n'est pas suffisant pour constituer une démonstration rigoureuse de la formule (307). Mais il montre bien l'origine de cette formule, dont les traités de calcul intégral donnent, *a posteriori*, la véritable démonstration ([1]).

Pour appliquer correctement cette formule, il est essentiel de supposer que la fonction scalaire div **V** est continue (ou du moins intégrable) à l'intérieur du domaine Ω et que le champ **V** y est lui-même continu ([2]). Lorsqu'il se présente des points singuliers isolés, on pourra utiliser la formule précédente, moyennant la précaution de retrancher du domaine Ω l'ensemble de ses points qui sont englobés par de petites sphères ayant leurs centres en ces points singuliers. On obtiendra ainsi un nouveau domaine Ω', dont la frontière comprend, outre les surfaces qui délimitent le domaine Ω, celles des sphères précédentes.

190. Cas où la divergence est identiquement nulle. — Dans ce cas, le flux à travers une surface fermée qui ne contient pas de singularité du champ est également nul, en vertu de la formule précédente.



Considérons en particulier une portion de surface S_1 limitée à un seul contour (réductible par déformation continue à un cercle), et par chaque point de ce contour menons la ligne de champ qui passe en ce point. L'ensemble des lignes ainsi obtenues et qui s'appuient sur les bords de la rondelle S_1 constitue une sorte de tube, qu'on nomme *tube de champ* : S_1 est une section de ce tube : soit S_2 une autre section, disposée de manière que S_1, S_2 et les parois du tube délimitent un certain volume Ω (en particulier, nous supposons, bien que cela ne soit pas absolument indispensable, que S_1 et S_2 ne sont pas sécants).

(1) Voir Picard, *Traité d'Analyse*, chap. v, tome I, et Goursat, *Cours d'Analyse*, tome I.

(2) Dans certains cas, il pourrait se faire que div. **V** soit continu, et qu'en même temps le champ **V** présente des singularités, c'est ce qui arriverait si, prenant un point fixe O, on avait $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{OM}}{r^3} = \operatorname{grad} \frac{1}{r}$. Le point O serait singulier, et on aurait cependant div. $\mathbf{V} = 0$. La précaution signalée à la fin du n° 189 n'en demeure pas moins nécessaire. Voir la note de la page 232.

Par hypothèse, la divergence est nulle et il n'y a pas de singularité du champ dans le domaine Ω. D'autre part le flux à travers les parois du tube est nul, puisque le vecteur du champ y est partout tangent à la surface du tube. La somme des flux extérieurs relatifs à S_1 et S_2 est donc nulle. On peut encore s'exprimer de la manière suivante :

Le flux qui entre par S_1 *dans le volume* Ω *est égal au flux qui en sort par* S_2 (1).

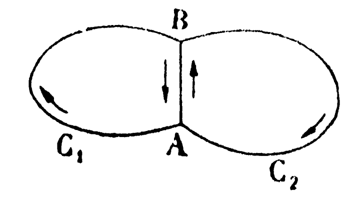
C'est le théorème de la conservation du flux. On peut l'appliquer en particulier au cas où les deux aires S_1 et S_2 seraient délimitées par le même contour C. Donnons à ces aires une orientation commune, liée au sens de parcours de C, en convenant d'appeler côté positif de l'une d'elles le côté où doit se placer un observateur, normalement à cette aire, pour que le sens de parcours de C lui paraisse coïncider avec le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

Dans ces conditions, il y a égalité des deux flux qui correspondent respectivement à S_1 et à S_2.

Nous conserverons donc la même valeur du flux pour toute surface limitée à C, lorsque nous déformerons cette surface d'une manière continue, de manière à ne lui faire traverser aucune singularité du champ.

Nous avons signalé plus haut une notion extrêmement féconde due à M. Volterra, celle des *fonctions d'une ligne* ou d'une surface. Dans un champ de divergence nulle, la notion de flux nous fournit un exemple simple de fonction de ligne, qui possède une particularité remarquable.

Soit en effet un domaine Ω, réductible par déformation continue à une sphère. Soit C une ligne fermée et sans point double, intérieure à ce domaine. Supposons qu'on ait défini, dans le domaine Ω, un champ vectoriel sans singularité et à divergence nulle. Le flux qui correspond à ce champ possède alors une valeur bien déterminée sur chaque ligne C, *douée d'un sens de parcours*, cette valeur se changeant en la valeur opposée lorsqu'on substitue à C la même ligne, douée de l'orientation inverse. Plus généralement, ce flux Φ à travers C possède la propriété suivante : supposons que C soit constituée par l'ensemble des points communs à deux lignes fermées, elles-mêmes orientées, C_1 et C_2, à l'exception des points d'un arc AB, commun à ces deux contours, et parcouru dans le sens AB lors d'une description de C_2, dans le sens BA lors d'une description de C_1. Désignons par Φ_1 et Φ_2 les flux relatifs aux lignes orientées C_1 et C_2. On a la relation



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{308}$$

qui présente quelque analogie avec le théorème d'addition d'une fonction ordinaire du premier degré (analogie qui apparaît mieux encore si l'on convient d'écrire dans les conditions précédentes $C = C_1 + C_2$). Pour cette raison, M. Volterra a donné aux

(1) Ce résultat étant obtenu, on se débarrasse aisément de la restriction « S_1 non sécant à S_2 » en considérant une troisième section du tube de champ qui n'est sécante ni à S_1, ni à S_2.

fonctions de lignes orientées répondant à la condition (308) la dénomination de *fonctions du premier degré.*

On peut donc énoncer le théorème suivant : *le flux Φ d'un vecteur appartenant à un champ régulier et de divergence nulle, à travers un contour orienté* C (tracé dans le domaine de régularité) *est une fonction du premier degré de ce contour.* La réciproque est d'ailleurs exacte : toute fonction du premier degré d'un contour orienté est le flux d'un champ vectoriel à divergence nulle. Nous ne ferons qu'indiquer ce résultat : pour l'énumération des hypothèses précises qu'il implique et pour sa démonstration, nous renverrons le lecteur à un mémoire en français de M. Volterra (*Acta Mathematica*, tome XII).

191. Circulation et formule de Stokes. — Soit **V** (M) un champ vectoriel de divergence nulle. Nous avons vu qu'on peut, et d'une infinité de manières, mettre **V** sous la forme (1)

$$\mathbf{V} = \mathbf{rot}\,\mathbf{U},$$

et qu'inversement tout champ défini comme étant le rotationnel d'un autre champ possède une divergence nulle. Supposons qu'un tel champ soit sans singularité à l'intérieur d'un certain volume Ω, réductible par déformation continue à une sphère. Calculons le flux de ce champ à travers une courbe fermée et sans point double, tracée à l'intérieur de Ω; soit C cette courbe, supposée orientée : en désignant par S une surface limitée au contour C, par ν le vecteur unité en un point de cette surface, dont le sens est lié au sens de parcours de C, il nous faut calculer

$$\int_S \mathbf{rot}\,\mathbf{U}\,.\,\nu \quad d\sigma_M.$$

Nous venons d'établir que cette intégrale de surface dépend uniquement du contour C : nous allons maintenant faire connaitre un important théorème de Stokes qui permet de transformer l'intégrale précédente en une intégrale curviligne étendue à C.

Nous appellerons *circulation* du champ vectoriel **U** (M) le long du contour orienté C l'intégrale

$$\int_C \mathbf{U}\,.\,d\mathrm{M},$$

où l'on suppose que le vecteur dM est un élément linéaire du contour C, dont le sens coïncide avec celui de C. Le théorème de Stokes consiste justement en l'égalité

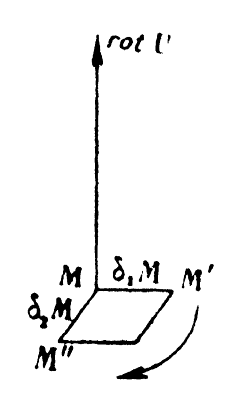
$$(309) \qquad \int_S \mathbf{rot}\,\mathbf{U}\,.\,\nu \quad d\sigma_M = \int_C \mathbf{U}\,.\,d\mathrm{M}.$$

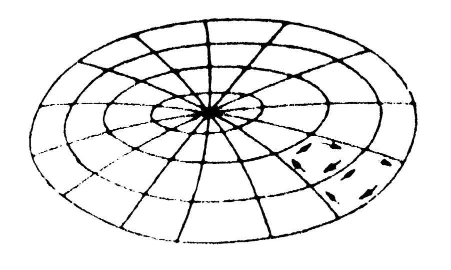
Pour établir ce résultat, rappelons d'abord la formule (216) [n° 162] : en appelant δ_1M et δ_2M deux déplacements infinitésimaux du point M et en considérant les variations infinitésimales correspondantes $\delta_1\mathbf{U}$ et $\delta_2\mathbf{U}$ du vecteur du champ, on peut écrire

$$(310) \qquad \delta_2\mathrm{M}\,.\,\delta_1\mathbf{U} - \delta_1\mathrm{M}\,.\,\delta_2\mathbf{U} = (\delta_1\mathrm{M},\ \delta_2\mathrm{M},\ \mathbf{rot}\,\mathbf{U}).$$

(1) Nous nous plaçons ici, d'une manière exclusive, au point de vue métrique, et il en sera ainsi dans toute la fin de cette section.

Cette dernière égalité n'est en somme que la traduction de la relation (309) dans le cas où le contour C se réduit à un parallélogramme infiniment petit, car $(\delta_1 M, \delta_2 M, \mathbf{rot\,U})$ est l'expression du flux de **rot U** à travers le parallélogramme construit sur $\delta_1 M$ et $\delta_2 M$, et d'autre part la quantité $\delta_2 M . \delta_1 \mathbf{U} - \delta_1 M . \delta_2 \mathbf{U}$ est une valeur approchée de la circulation de **U** suivant le contour de ce parallélogramme. En effet, appelons M′ et M″ les extrémités des vecteurs d'origine M dont les grandeurs géométriques respectives sont $\delta_1 M$ et $\delta_2 M$. Accouplons, sur le côté MM′ et son opposé dans le parallélogramme, les points situés sur une parallèle à MM″, points où les valeurs du champ diffèrent sensiblement de $\delta_2 \mathbf{U}$; et pareillement, sur MM″ et son opposé, les extrémités d'un segment parallèle à MM′, points où les valeurs du champ diffèrent de $\delta_1 \mathbf{U}$. On obtient ainsi, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, le résultat annoncé. On peut dès lors considérer la formule générale (309) comme établie : on peut en effet toujours supposer qu'on a tracé sur la surface S un double réseau de courbes coordonnées (par exemple l'un de ceux qui, lorsqu'on ramène S à un cercle par une déformation continue, se réduit au système composé par les rayons de ce cercle et par les circonférences qui lui sont concentriques), infiniment rapprochées les unes des autres. On décompose ainsi l'aire S en parallélogrammes infinitésimaux ayant pour orientation commune celle du contour C, et à chacun desquels la relation (309) est applicable. Les deux membres de cette relation étant des fonctions du premier degré (au sens de M. Volterra), si l'on ajoute membre à membre toutes les égalités obtenues en l'exprimant pour chaque parallélogramme, on obtient la formule de Stokes, où le flux est étendu à toute l'aire S et où la circulation est calculée pour le contour de cette aire. Les flèches qui ont été marquées sur la figure indiquent du reste les destructions qui se produisent le long de chaque côté commun à deux parallélogrammes.





L'exposé qui précède ne saurait encore constituer une démonstration rigoureuse de la formule de Stokes, mais il en montre bien l'origine. Le lecteur, pour préciser les hypothèses requises pour l'application de cette formule aussi bien que pour en étudier la démonstration abstraite, devra se reporter aux traités classiques d'analyse (1).

192. Cas où le rotationnel est identiquement nul. — Considérons un champ vectoriel **U** (M) et supposons que ce champ soit sans singularité à l'intérieur d'un certain volume Ω, susceptible d'être ramené à une sphère par une déformation continue. Si, en tout point de ce volume, on a

$$\mathbf{rot\,U} = 0,$$

(1) Voir par exemple GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, chap. VI, n° 139.

il résulte de la formule de Stokes que la circulation de **U** suivant toute courbe fermée est nulle. Si donc A et B sont deux points quelconques intérieurs au domaine Ω, la circulation de **U** a la même valeur pour toutes les courbes de ce domaine qui joignent le point A au point B. Laissons fixe le point A, et faisons varier le point B dans le domaine Ω. Cette circulation sera donc une fonction bien déterminée du point B, soit φ (B). Si B décrit un vecteur infiniment petit **BB**′, l'accroissement de la circulation, d'après la définition de celle-ci, est un infiniment petit équivalent à $\mathbf{U}_{\mathrm{B}}.\mathbf{BB}'$. Il en résulte, d'après la définition du gradient, que l'on a

$$\mathbf{U} = \mathrm{grad}\ \varphi. \tag{311}$$

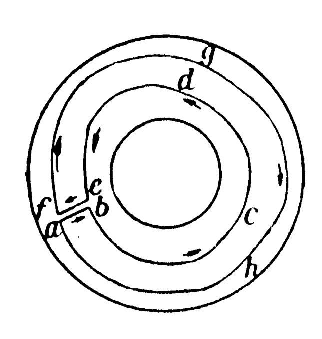
Réciproquement, nous avons vu que cette relation entraîne

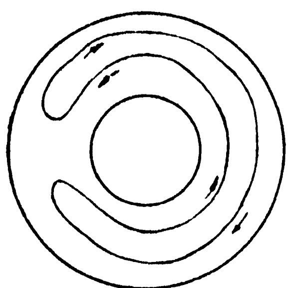
$$\mathrm{rot}\ \mathbf{U} = 0, \tag{311 bis}$$

fait que l'on pourrait d'ailleurs regarder comme une conséquence de la formule de Stokes elle-même.

En résumé, si dans un domaine Ω, le champ **U** est irrotationnel et exempt de singularité (Ω pouvant être obtenu par la déformation continue d'une sphère), l'élément de circulation $\mathbf{U}.d\mathrm{M}$ est une différentielle totale : son intégrale est indépendante du chemin et n'est fonction que des extrémités de ce dernier.

193. Rôle important des hypothèses de connexion. — Dans ce qui précède, nous avons dû faire intervenir une hypothèse de régularité du champ. Mais pour l'exprimer, il nous a été nécessaire de recourir également à une hypothèse concernant le domaine dans lequel on suppose cette régularité réalisée. Nous avons supposé que ce domaine est un *domaine simplement connexe*, c'est-à-dire pouvant être déduit d'une sphère par déformation continue. Toutes les lignes fermées qu'on peut tracer à l'intérieur d'un tel domaine peuvent, par déformation continue, être réduites à un point.





Il n'en est plus de même lorsqu'on raisonne sur un tore ou sur un domaine en résultant par déformation continue. Il y a lieu de distinguer, entre les lignes fermées tracées à l'intérieur d'un tel domaine, d'une part celles qui sont réductibles à des points, de l'autre celles qui font, une ou plusieurs fois, le tour de l'anneau. Les premières peuvent être englobées dans un domaine simplement connexe extrait du domaine initial : donc la circulation y est nulle.

Pour les autres, la circulation n'est pas nulle en général. Mais elle possède une même valeur pour les lignes qui font un nombre déterminé de tours. Démontrons-le par exemple pour deux lignes *bcde* et *ahgf* qui font une fois le tour de l'anneau. Il suffit à cet effet de raisonner à partir d'un contour tel que

$$(\gamma) = abcdefgha,$$

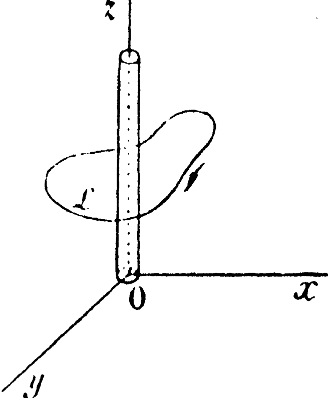
qui est réductible [comme le fait saisir le second dessin] à un point. Ce contour est formé :

1° de la ligne *bcde* faisant une fois le tour de l'anneau dans le sens rétrograde;

2° de la ligne *fgha* faisant une fois le tour de l'anneau dans le sens direct;

3° d'un trajet *ab* et du trajet *ef* infiniment voisin du chemin inverse. Ces deux trajets donnent, dans le calcul de la circulation suivant (γ), des valeurs opposées dont l'ensemble disparaît du résultat final.

En résumé, la circulation suivant (γ) est donc nulle : elle est d'ailleurs égale à la différence des circulations le long de nos deux lignes, si celles-ci sont parcourues l'une et l'autre dans le sens direct. Ces circulations sont donc égales.



Reprenons en particulier l'exemple déjà cité au n° 180, dans lequel le champ $\mathbf{U}(M)$ avait pour composantes

$$u = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad v = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad w = 0.$$

Un tel champ est régulier et irrotationnel dans la région de l'espace extérieure à tout cylindre de révolution d'axe Oz. Sa circulation a donc la même valeur le long de toutes les lignes, telles que $\mathcal{L}$, qui font une fois dans le sens direct le tour de cet axe. Pour déterminer cette valeur commune, on pourra s'adresser au cercle de centre O et de rayon 1, dans le plan des xy. L'intégrale étendue à ce cercle peut s'écrire

$$\int \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2},$$

ou, en prenant des coordonnées polaires dans le plan xOy,

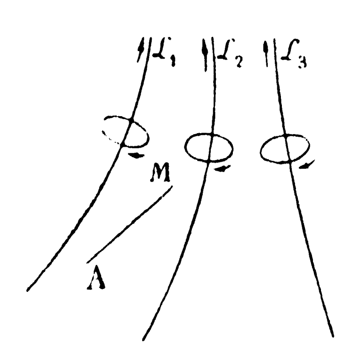
$$\int_0^{2\pi} d\theta.$$

La valeur de toutes les intégrales relatives aux lignes $\mathcal{L}$ précédemment définies est donc égale à 2π.

Si une ligne faisait plusieurs tours à l'intérieur de l'anneau (ou, dans l'exemple précédent, autour de l'axe Oz), la circulation le long de cette ligne serait un multiple de la valeur obtenue pour les lignes qui font un tour (le multiplicateur étant égal au nombre n de tours) : car on peut indifféremment décrire une telle ligne ou parcourir n fois de suite le périmètre d'une ligne qui tourne une seule fois.

Ces considérations nous font comprendre en outre dans quelles conditions un champ vectoriel uniforme peut constituer le gradient d'une fonction de point non uniforme (circonstance déjà signalée au n° 180). Prenons un champ vectoriel qui soit partout irrotationnel mais qui présente des lignes singulières. Le potentiel scalaire dont dérive ce champ s'obtient, en chaque point M, de la manière suivante : on choisit, une fois pour toutes, un point fixe A dans le champ; le potentiel scalaire en M est, au signe près, la circulation le long d'un arc qui réunit A et M. Pour que ce potentiel soit uniforme, *il faut que tous les chemins* AM *donnent la même circula-*

tion. Il en sera bien ainsi en l'absence de lignes singulières : on pourra, sans que la conclusion précédente soit modifiée, admettre même dans le champ l'existence de points singuliers isolés. Ce qui importe en effet, c'est que tous les chemins AM puissent être réduits à l'un d'entre eux sans rencontrer de singularités. Par contre, supposons qu'il existe des lignes singulières, mettons-en trois pour fixer les idées, soient $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$. Le potentiel en un point M aura, en général, une infinité de déterminations : attachons-nous à considérer l'une de ces déterminations φ, calculée par la circulation de A en M le long d'un arc AM bien déterminé. Tout autre chemin menant de A en M se ramène à plusieurs circuits partant de A et y aboutissant (après avoir tourné un certain nombre de fois autour de $\mathfrak{L}_1$, autour de $\mathfrak{L}_2$, et autour de $\mathfrak{L}_3$), suivis du trajet AM précédent. Appelons respectivement ω_1, ω_2, ω_3 les valeurs qu'il convient d'attribuer à la circulation pour un tour (et un seul) accompli autour de $\mathfrak{L}_1$, pour un tour accompli autour de $\mathfrak{L}_2$, pour un tour accompli autour de $\mathfrak{L}_3$ (le sens de ces tours étant fixé par une convention relative aux sens de parcours de $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$).



L'expression générale de toutes les déterminations du potentiel scalaire en M sera donc de la forme

$$\varphi + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3,$$

en désignant par m_1, m_2, m_3 des entiers de valeurs et de signes quelconques. Dans l'exemple cité ci-dessus, il y avait une seule ligne singulière du champ vectoriel, l'axe des z, et par suite une seule période $\omega = 2\pi$.

194. Autres intégrales de scalaires. Formule de Green. — Revenons aux intégrales en volume de fonctions scalaires. Parmi les types possibles qu'on peut relier à la considération de deux champs vectoriels, nous nous attacherons particulièrement au suivant :

$$(312) \qquad \int_\Omega \mathbf{U}(\mathrm{M}).\mathbf{V}(\mathrm{M})\, d\omega_{\mathrm{M}}.$$

Nous supposerons essentiellement que le champ **U** soit irrotationnel, et que son potentiel scalaire — φ soit uniforme. Cette condition résulte d'ailleurs de la suivante, plus restrictive, et que nous supposerons aussi réalisée : c'est qu'il ne se présente dans le domaine Ω aucune singularité des champs étudiés (supposés sinon analytiques tout au moins ayant des composantes douées de dérivées partielles du premier ordre partout continues). En posant

$$\mathbf{U} = \mathbf{grad}\, \varphi,$$

φ désignera donc une fonction continue en tout point du domaine Ω, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. Nous supposerons que cette fonction est aussi continue sur la frontière de ce domaine, et qu'il en est de même sur cette frontière de sa dérivée normale [1].

(1) Pour bien préciser le sens de cette hypothèse, on pourra considérer le système des normales à cette surface et prendre sur chacune de ces normales, à l'intérieur du domaine

Cela posé, nous ferons des hypothèses analogues relativement à la continuité de **V**(M) et de ses dérivées et nous examinerons successivement les deux cas suivants :

1° **V**(M) dérive d'un potentiel vecteur;

2° **V**(M) dérive d'un potentiel scalaire.

1er Cas. — Nous avons, par hypothèse,

$$\mathbf{U} = \mathrm{grad}\,\varphi \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V} = \mathrm{rot}\,\mathbf{W}.$$

Or, dans tous les cas on peut écrire

$$\mathrm{grad}\,\varphi\,.\,\mathbf{V} = \mathrm{div}\,(\varphi\mathbf{V}) - \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}. \tag{313}$$

Dans les conditions actuelles, **V** a une divergence nulle. Il en résulte que l'on peut écrire

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\,\varphi\,.\,\mathrm{rot}\,\mathbf{W}\,d\omega = \mathrm{flux}\,(\varphi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{W}), \tag{314}$$

ce flux étant étendu à toute la surface qui limite le volume Ω.

2e Cas. — Soient maintenant

$$\mathbf{U} = \mathrm{grad}\,\varphi \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V} = \mathrm{grad}\,\psi.$$

La formule (313) nous donne ici

$$\mathrm{grad}\,\varphi\,.\,\mathbf{V} = \mathrm{div}\,(\varphi\mathbf{V}) - \varphi\Delta_2\psi.$$

Nous en déduisons, en substituant à l'intégrale de volume de div $(\varphi\mathbf{V})$ le flux du vecteur $\varphi\mathbf{V} = \varphi\,\mathrm{grad}\,\psi$,

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\,\varphi\,.\,\mathrm{grad}\,\psi\,d\omega = -\int_S \varphi\frac{d\psi}{dn}\,d\sigma - \int_\Omega \varphi\Delta_2\psi\,d\omega, \tag{315}$$

en supposant que la dérivée $\frac{d\psi}{dn}$ corresponde au sens de la normale, orienté vers l'intérieur du volume (ce qui est préférable, puisqu'un déplacement effectué le long de la normale extérieure à partir de la frontière amène en une région où les propriétés de la fonction n'ont pas été spécifiées, et où cette fonction peut, dans certains cas, cesser complètement d'exister).

A cause de la symétrie du premier membre de la formule (315) en φ et ψ, on peut (en faisant sur ψ les mêmes hypothèses que sur φ) écrire également

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\,\varphi\,.\,\mathrm{grad}\,\psi\,d\omega = -\int_S \psi\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma - \int_\Omega \psi\Delta_2\varphi\,d\omega. \tag{316}$$

Ω, un point infiniment voisin du point d'incidence : la dérivée en ce point suivant la normale qui y passe (bien déterminée, à proximité de la surface) possède, par hypothèse, une limite, lorsque ce point tend vers le point d'incidence, limite qui vient bien se confondre avec la dérivée suivant cette même normale, prise exactement au point d'incidence. Dans le cas d'une sphère de rayon R et de centre O, la fonction $(R - OM)^2 \sin\frac{1}{R - OM}$ ne répondrait pas à cette hypothèse. Elle aurait une dérivée normale égale à zéro sur la sphère, sans cependant que cette dérivée normale soit continue.

En retranchant membre à membre les formules (315) et (316), nous obtenons la *formule de Green*

$$(317) \qquad \int_\Omega (\varphi \Delta_2 \psi - \psi \Delta_2 \varphi) d\omega + \int_S \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) d\sigma = 0 \ (^1).$$

195. Passage d'une répartition vectorielle en volume à une répartition vectorielle en surface. — Nous allons maintenant nous occuper des intégrales dont chaque élément est un vecteur libre infiniment petit. Considérons par exemple l'intégrale de volume

$$\int_\Omega \mathbf{V}(M)\, d\omega_M,$$

qui représente elle-même un vecteur libre, soit **A**. A cette répartition en volume, on peut dans certains cas substituer une répartition superficielle, portée par la surface qui délimite le domaine Ω. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi lorsque **V** dérive, ou bien d'un potentiel scalaire $-\varphi$, ou bien d'un potentiel vecteur $-$ **W**.

1[er] CAS. — Il s'agit de calculer l'intégrale

$$(318) \qquad \mathbf{A} = \int_\Omega \mathbf{grad}\, \varphi\, d\omega.$$

Pour établir cela, évaluons le produit scalaire du vecteur **A** par un vecteur unité arbitraire **u**. Nous pouvons écrire

$$(319) \qquad \mathbf{A} \,.\, \mathbf{u} = \int \mathbf{grad}\, \varphi \,.\, \mathbf{u} \quad d\omega.$$

Le vecteur **u** étant d'ailleurs supposé fixe, la formule (313) nous permet d'écrire, en faisant $\mathbf{V} = \mathbf{u}$,

$$(320) \qquad \mathbf{grad}\, \varphi \,.\, \mathbf{u} = \mathrm{div}\, (\varphi \mathbf{u}).$$

Nous avons donc

$$(321) \qquad \mathbf{A} \,.\, \mathbf{u} = \mathrm{flux}\, (\varphi \mathbf{u}) = \int_S \varphi \mathbf{u} \,.\, \nu \quad d\sigma,$$

ν désignant, comme au n° 188, le vecteur unité de la normale extérieure. La relation (321) doit avoir lieu quel que soit **u**. Ceci exige que l'on ait

$$(322) \qquad \mathbf{A} = \int_\Omega \mathbf{grad}\, \varphi\, d\omega = \int_S \varphi \nu \quad d\sigma.$$

Nous avons atteint ainsi le but annoncé, en substituant à une répartition en volume, de densité spatiale **grad** φ, une *répartition superficielle normale* de densité $\varphi \nu$.

2[e] CAS. Posons maintenant

$$(323) \qquad \mathbf{A} = \int_\Omega \mathbf{rot}\, \mathbf{W}\, d\omega,$$

(1) *Cas particulier* : $\varphi(M)$ est harmonique dans une sphère S de centre O, $\psi(M) = \frac{1}{OM}$; le domaine Ω est la sphère S, moins une sphère concentrique infiniment petite. On obtient le théorème de Gauss, suivant lequel $\varphi(O)$ est la moyenne des valeurs de φ sur S.

et soit encore **u** un vecteur unité arbitraire, mais fixe. En vertu de la relation (220) et de la constance de **u**, nous aurons

(324) $$\mathrm{div}(\mathbf{W} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{u}.\mathbf{rot}\,\mathbf{W}.$$

Il s'ensuit que l'on peut appliquer, ici encore, le théorème flux-divergence, ce qui donne

$$\mathbf{A}.\mathbf{u} = \int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{rot}\,\mathbf{W}\,d\omega = \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{W} \wedge \mathbf{u})\,d\omega = \mathrm{flux}_S(\mathbf{W} \wedge \mathbf{u}).$$

Ainsi donc, quel que soit **u**, nous aurons, en désignant toujours par ν le vecteur unité de la normale extérieure,

$$\mathbf{A}.\mathbf{u} = \int_S (\nu,\ \mathbf{W},\ \mathbf{u})\,d\sigma = \mathbf{u}.\int \nu \wedge \mathbf{W}\,d\sigma.$$

On a donc

(325) $$\mathbf{A} = \int_\Omega \mathbf{rot}\,\mathbf{W}\,d\omega = \int_S \nu \wedge \mathbf{W}\,d\sigma.$$

Ainsi, à une densité vectorielle spatiale **rot W**, on peut, moyennant les conditions de continuité requises pour la régularité des intégrations, substituer un *champ tangentiel* de densité superficielle égale à $\nu \wedge \mathbf{W}$.

Remarque. — On démontre dans des cas étendus qu'on peut écrire un champ vectoriel **V** (M) sous la forme

(326) $$\mathbf{V}(M) = \mathbf{grad}\,\varphi + \mathbf{rot}\,\mathbf{W},$$

ou, comme on dit, le regarder comme la somme de deux champs dérivant respectivement d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur. Toutes les fois qu'on saura calculer explicitement φ et **W**, on pourra donc ramener l'intégrale

$$\int_\Omega \mathbf{V}(M)\,d\omega_M$$

à celle d'une répartition de vecteurs portée par la surface qui délimite le domaine Ω : en chaque point de cette surface on aura une composante normale provenant du potentiel scalaire, et une composante tangentielle provenant du potentiel vecteur.

Dans les calculs précédents, le théorème *flux-divergence* joue un rôle essentiel. On pourrait songer de même à la formule de Stokes pour passer de distributions vectorielles en surfaces à des distributions étendues aux lignes qui en sont les bords. Soit **U** le vecteur donné en chaque point de la surface S : en appelant **u** un vecteur fixe arbitraire, il faudrait trouver en chaque point de S un vecteur **V** tel que

$$\mathbf{U}.\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V}.\nu.$$

Nous ne développerons pas cette question qui ferait intervenir des opérateurs portant simultanément sur le champ **U** et sur le champ ν, défini seulement aux points de S (mais qu'on peut étendre à tout l'espace suivant une loi, d'ailleurs arbitraire). En revanche, nous allons revenir un instant sur l'idée, déjà citée, de fonction de

ligne ou de surface : elle nous fournira matière à résoudre quelques problèmes où apparaît l'opportunité des notations vectorielles.

196. Généralités sur les fonctions de lignes et les fonctions de surfaces. — Notre but ne saurait être de donner sur cette importante question un exposé même élémentaire, et nous renverrons nos lecteurs que la question intéresse aux ouvrages et aux mémoires de MM. Volterra et Paul Lévy [1]. Rappelons seulement une modalité essentielle qu'on rencontre au début de cette théorie, et qui consiste à distinguer pour les fonctions dont nous allons nous occuper, divers modes de continuité.

En s'en tenant aux premières données de l'intuition, on serait tenté d'appeler (dans l'espace métrique à trois dimensions) *courbes voisines d'une courbe* C, à ε près, toutes celles qui restent à l'intérieur d'une surface canal, enveloppe de sphères de rayon ε et centrées sur C; d'appeler de même *surfaces voisines d'une surface* S, à ε près, celles qui restent comprises entre deux surfaces parallèles à S, menées de part et d'autre et à la distance ε. Une telle définition peut suffire dans certains cas. En particulier, elle assurerait pleine validité au théorème suivant :

Si la surface fermée S *délimite un domaine de volume* $\mathfrak{V}$, *toute surface* S' *infiniment voisine de* S *délimite un volume* $\mathfrak{V}'$ *infiniment voisin de* $\mathfrak{V}$.

En revanche, il serait inexact de dire, dans de telles conditions, qu'un arc infiniment voisin d'un arc de courbe AB ait sa longueur infiniment voisine de celle de cet arc, qu'une portion de surface infiniment voisine d'une autre ait son aire infiniment voisine de celle de cette autre, car notre définition n'exclut pas la possibilité de certaines sinuosités, capables de modifier notablement la longueur ou l'aire. Nous dirons qu'elle convient *au voisinage d'ordre zéro*, ainsi appelé parce qu'il n'est fait, pour le définir, aucune hypothèse sur la proximité des dérivées en des points très voisins.

Supposons qu'on étende l'hypothèse de proximité aux dérivées du premier ordre, c'est-à-dire qu'on impose aux tangentes en deux points infiniment voisins (s'il s'agit de lignes, aux plans tangents s'il s'agit de surfaces) de faire entre eux des angles très petits. On obtient ainsi, par définition, un *voisinage du premier ordre*.

On peut faire des hypothèses de plus en plus restrictives, et étendre l'hypothèse de proximité à des dérivées d'ordre de plus en plus élevé. On passe ainsi, par une généralisation facile, aux voisinages d'ordres 2, 3, ..., *n*.

Ces considérations sont indispensables pour définir la continuité d'une fonction de ligne ou de surface. On devra distinguer des fonctions continues des divers ordres. Sans entrer dans le détail des démonstrations, nous apercevons immédiatement les résultats suivants :

La longueur d'un arc de courbe, ou encore l'aire d'une portion de surface, possèdent la continuité d'ordre un.

L'énoncé que nous avons donné plus haut peut lui-même, grâce à cette terminologie, se résumer comme suit : *le volume possède la continuité d'ordre zéro.*

(1) VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes.* — Paul LÉVY, *Leçons d'analyse fonctionnelle.*

Remarque. — Considérons un champ vectoriel dont la divergence soit une fonction de point continue. Traçons dans ce champ une surface fermée S. Le flux à travers S est une fonction de cette surface. Si nous nous reportons à la définition du flux donnée à la fin du n° 188, il pourrait sembler que le flux possède seulement la continuité du premier ordre. Le théorème flux-divergence montre immédiatement que cette apparence est trompeuse et que la continuité dont il s'agit est en réalité d'ordre zéro [1].

197. Forme de la variation première d'une fonction de ligne. — Raisonnons toujours sur une ligne d'un espace métrique ordinaire, à trois dimensions. Un arc AB de cette ligne peut être envisagé comme la limite d'une ligne brisée $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ d'un très grand nombre de côtés : nous considérerons une fonction qui dépend de la totalité de l'arc AB comme la limite d'une fonction ordinaire dépendant de tous les sommets de la ligne précédente. C'est la méthode de passage du fini à l'infini, introduite systématiquement par M. Volterra, et qui fournit, dans toutes les questions de ce genre, un fil directeur extrêmement précieux.

Provisoirement, nous portons donc notre attention sur une fonction qui dépend de $n+1$ points. Fixons n d'entre eux et faisons varier celui qui reste, nous aurons une fonction de ce point restant, et, par rapport à ce point, nous pourrons définir un *gradient partiel*. Si le point en question est M_i, l'accroissement infinitésimal de F sera donné par une formule du type

$$\delta_i F = \mathrm{grad}_{M_i} F \,.\, \delta M_i,$$

la notation $\delta_i F$ indiquant qu'il s'agit d'un accroissement provoqué par le déplacement du seul point M_i. Dès lors, si l'on donne simultanément aux sommets de la ligne brisée des déplacements infinitésimaux δA, δM_1, ..., δM_{n-1}, δB, on obtiendra pour F une *variation totale*

$$(327) \qquad \begin{aligned} \delta F = {} & \mathrm{grad}_A F \,.\, \delta A + \mathrm{grad}_{M_1} F \,.\, \delta M_1 \\ & + \ldots + \mathrm{grad}_{M_{n-1}} F \,.\, \delta M_{n-1} + \mathrm{grad}_B F \,.\, \delta B. \end{aligned}$$

On pourrait être tenté d'en conclure qu'en effectuant le passage à la limite précédent, la variation infinitésimale d'une fonction F de l'arc AB est susceptible de s'exprimer sous la forme

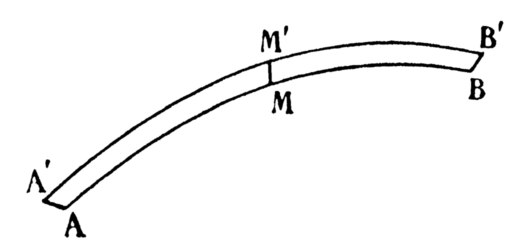
$$(327\ bis) \qquad \delta F = \int_{AB} V_M \,.\, \delta M \, ds_M,$$

V_M désignant un vecteur bien déterminé en chaque point M de la courbe, δM le déplacement infinitésimal subi par ce point, et s_M son abscisse curviligne. Un tel résultat serait cependant inexact : c'est ce que va nous montrer un exemple choisi le plus simplement du monde, exemple qui nous amènera d'une manière naturelle à la conclusion suivante : chaque fois que des points jouent un rôle particulier dans la définition de la fonction F, il s'ajoute au second membre de la formule (327 *bis*) des termes provenant de ces points.

[1] Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 mars 1923. Note de l'auteur.

198. Variation de la longueur d'un arc de courbe. — Proposons-nous en effet cette question :

Calculer la variation infiniment petite subie par la longueur d'un arc de courbe AB, *lorsque chaque point de cet arc* (et en particulier ses extrémités) ***est soumis*** *à un déplacement infiniment petit.*



La fonction F dont il s'agit ici est la longueur $\mathfrak{L}$ de l'arc AB : il est indéniable que, dans cette définition, les points A et B jouent un rôle particulier.

Soit M un point de l'arc AB, appelons s son abscisse curviligne. Exprimons en fonction de s le vecteur **MM'** ou δM, qui constitue le déplacement infinitésimal subi par le point M. Le point M' engendre, lorsque M décrit $\overset{\frown}{AB}$, un arc $\overset{\frown}{A'B'}$ qui possède avec $\overset{\frown}{AB}$, par hypothèse, un voisinage du premier ordre au moins.

Pour calculer l'accroissement de longueur, nous nous inspirerons de l'idée suivante :

Prenons une fonction d'un nombre fini de variables, par exemple une fonction de trois variables

$$f(u, v, w).$$

Si u, v, w sont à leur tour des fonctions d'une même variable indépendante λ, l'expression précédente devient une fonction composée de λ, dont la dérivée se calcule par la formule

$$\frac{df}{d\lambda} = f'_u \frac{du}{d\lambda} + f'_v \frac{dv}{d\lambda} + f'_w \frac{dw}{d\lambda}; \tag{328}$$

cette dérivée est donc le quotient par $d\lambda$ de la *différentielle totale* de la fonction f. Inversement, pour calculer cette différentielle totale, on peut imaginer que u, v, w dépendent d'un seul paramètre λ, sans préciser d'ailleurs les lois particulières de cette dépendance, prendre la dérivée de la fonction ainsi obtenue par rapport à λ, et multiplier cette dérivée par $d\lambda$. Ce calcul donne bien

$$f'_u du + f'_v dv + f'_w dw.$$

C'est exactement cette méthode que nous allons appliquer ici : au lieu de considérer toutes les courbes possibles infiniment voisines (d'ordre un) de AB, nous imaginerons qu'on choisisse, parmi ces courbes, une famille à un paramètre, sans toutefois préciser le choix explicite de cette famille. Supposons donc que le point M dépende des deux paramètres s et λ. Pour $\lambda = 0$, M décrit $\overset{\frown}{AB}$ et s désigne son abscisse curviligne sur cet arc. Pour une valeur non nulle de λ, l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ a sa longueur exprimée par la formule

$$\mathfrak{L}' = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{M}'}{ds}\right)^2}\, ds.$$

Prenons la dérivée par rapport au paramètre λ pour la valeur $\lambda = 0$. Nous aurons, en général [1],

$$\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \lambda} = \int_{s_A}^{s_B} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sqrt{\left(\frac{d\mathrm{M}'}{ds}\right)^2} ds = \int_{s_A}^{s_B} \frac{\frac{d\mathrm{M}'}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{d\mathrm{M}'}{ds}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d\mathrm{M}'}{ds}\right)^2}} ds.$$

Puisqu'on fait $\lambda = 0$, $\frac{d\mathrm{M}'}{ds}$ se réduit au vecteur $\frac{d\mathrm{M}}{ds}$, de longueur égale à l'unité. Donc

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda}_{\lambda=0} = \int_{s_A}^{s} \frac{d\mathrm{M}}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{d\mathrm{M}}{ds}\right) ds = \int_{s_A}^{s_B} \frac{d\mathrm{M}}{ds} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda}\right) ds.$$

Intégrons par parties, en remarquant que l'un des facteurs du produit scalaire est la dérivée, par rapport à s, du vecteur $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda}$. Puisqu'un produit scalaire se dérive comme un produit ordinaire, le mécanisme de l'intégration par parties est aussi le même qu'en analyse ordinaire. Ce calcul donne

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} = \left(\frac{d\mathrm{M}}{ds} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda}\right)_{\mathrm{B}} - \left(\frac{d\mathrm{M}}{ds} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda}\right)_{\mathrm{A}} - \int_{s_A}^{s_B} \frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2} \cdot \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda} ds.$$

Pour avoir la variation, il nous suffit de multiplier les deux membres par $\delta\lambda$, ce qui donne

(329) $$\delta \mathcal{L} = \mathbf{T}_{\mathrm{B}} . \delta \mathrm{B} - \mathbf{T}_{\mathrm{A}} . \delta \mathrm{A} - \int_{s_A}^{s_B} \frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2} . \delta \mathrm{M} ds,$$

où $\mathbf{T}$ désigne le vecteur unité de la tangente à notre arc de courbe dans le sens des arcs croissants. Plus spécialement, $\mathbf{T}_{\mathrm{A}}$ et $\mathbf{T}_{\mathrm{B}}$ indiquent les positions particulières de ce vecteur aux points A et B. Les formules de Frenet nous donnent d'ailleurs

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \rho \mathbf{N},$$

en appelant ρ la courbure en M. Finalement, nous pouvons donc écrire

(330) $$\delta \mathcal{L} = \mathbf{T}_{\mathrm{B}} . \delta \mathrm{B} - \mathbf{T}_{\mathrm{A}} . \delta \mathrm{A} - \int_{s_A}^{s_B} \rho \mathbf{N} . \delta \mathrm{M} ds.$$

Cette formule n'est pas du type (327 *bis*). Elle contient bien un terme intégral, qui présente la forme annoncée. Mais elle fait intervenir en outre les produits scalaires $\mathbf{T}_{\mathrm{B}}. \delta\mathrm{B}$ et $\mathbf{T}_{\mathrm{A}}.\delta\mathrm{A}$ dus au rôle particulier joué par les points A et B dans la définition de la ligne considérée et des fonctions qui s'en déduisent. Si à la ligne ouverte nous substituons une ligne fermée, et si nous ne comparons entre elles que des lignes fermées infiniment voisines (d'ordre un), le terme tout intégré disparaîtra et nous retomberons sur une formule du type (327 *bis*).

(1) Au numérateur du dernier membre de la suite d'égalités $\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \lambda} = \ldots$ figure un produit scalaire.

Notons en outre (et cela tient au caractère particulier du problème actuel) que le vecteur **V** de la formule (327 *bis*), auquel on pourrait donner la dénomination *densité de gradient*, est déterminé ici exclusivement par les propriétés locales de l'arc AB : en chaque point M de cet arc, il se réduit en effet au vecteur de courbure ρ**N** en ce point [1].

On peut imaginer des fonctions de ligne arbitrairement compliquées, et dont la définition assigne des rôles spéciaux à certains points de la ligne considérée. Entre mille hypothèses possibles, on peut considérer par exemple une ligne fermée $\mathfrak{L}$, un point A de cette ligne, et une expression

$$F = \int_{\mathfrak{L}} f(r)\,ds,$$

en appelant r la distance d'un point M de $\mathfrak{L}$ à la tangente en A (ou au centre de courbure en ce point, etc...). Nous nous bornerons à citer cet exemple, pour fixer les idées du lecteur, et à indiquer qu'en pareil cas l'expression de la variation δF fera intervenir non seulement un terme fonction linéaire du vecteur δA, mais d'autres termes, fonctions linéaires de ses dérivées géométriques [2].

Nous n'insisterons pas davantage sur ce genre de questions, et revenant à la longueur d'un arc de courbe, nous évaluerons sa variation en supposant que cet arc soit astreint à demeurer sur une surface donnée. Cette étude nous conduira à d'importantes applications.

199. Variation de la longueur d'un arc de courbe, sur une surface. — On peut envisager ce problème, soit au point de vue métrique externe, soit au contraire au point de vue de la géométrie autonome de la surface.

1° Plaçons-nous d'abord au point de vue métrique externe. La solution du problème nous est toujours donnée par la formule (330). Mais ici, le vecteur δM appartenant au plan tangent en M, on a évidemment

$$\mathbf{N}.\delta M = \cos\theta\ \ \Gamma.\delta M,$$

en appelant Γ le vecteur unité de la normale géodésique. La densité de gradient serait donc ici le produit du vecteur normale géodésique unité par le scalaire que nous avons appelé *courbure géodésique*, soit $\rho\cos\theta$.

Notons en passant que nous obtenons ici une nouvelle démonstration de ce fait que $\rho\cos\theta$ est un élément géodésique de la surface : nous venons en effet de le rencontrer dans l'expression de la variation de la longueur de l'arc AB, quantité essentiellement géodésique.

2° On peut aussi raisonner directement. Supposons qu'on ait adopté une représentation de la surface au moyen de deux paramètres λ et μ, et soit

$$ds^2 = E d\lambda^2 + 2F d\lambda\, d\mu + G d\mu^2$$

(1) Ce fait d'une densité de gradient à expression purement locale est un caractère essentiel des fonctions de lignes qui se rencontrent dans le calcul des variations *classique*.

(2) Si r est la distance de M à la tangente en A, s'introduirait seulement la dérivée première ; si r est la distance au centre de courbure en A, apparaîtrait en outre la dérivée seconde.

l'élément linéaire de la surface. Lorsque le point M décrit l'arc AB sur la surface S, on peut supposer que λ et μ sont certaines fonctions d'un paramètre t, qui croît de t_A jusqu'à t_B lorsque M se déplace de A en B. Dans ces conditions, la longueur $\mathfrak{L}$ de l'arc AB s'exprime par la formule

$$(331)\quad \mathfrak{L}=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\frac{E d\lambda^2+2F d\lambda d\mu+G d\mu^2}{dt^2}}\,dt=\int_{t_A}^{t_B}\varphi\left(\lambda,\mu,\frac{d\lambda}{dt},\frac{d\mu}{dt}\right)dt,$$

ce que nous écrirons tout simplement, sans préciser le paramètre t,

$$\mathfrak{L}=\int_{AB}\sqrt{E d\lambda^2+2F d\lambda d\mu+G d\mu^2}.$$

Pour calculer $\delta\mathfrak{L}$, il est commode de supposer que le vecteur δM est exprimé précisément à l'aide de la variable t qui sert à individualiser un point de l'arc AB. En outre, nous particulariserons encore le problème en admettant que l'ensemble des courbes variées soit réduit à une famille à un paramètre α, dont la courbe $\alpha=0$ est l'arc primitif AB; les quantités λ, μ et par suite $\frac{d\lambda}{dt}$, $\frac{d\mu}{dt}$ sont alors des fonctions de α. De la formule (331) on tire facilement

$$(332)\quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\alpha}=\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\frac{\partial\lambda'}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\frac{\partial\mu'}{\partial\alpha}\right)dt,$$

en désignant en abrégé $\frac{d\lambda}{dt}$ par λ' et $\frac{d\mu}{dt}$ par μ'. D'ailleurs α et t constituent deux paramètres indépendants. Il en résulte que l'on a

$$\frac{\partial\lambda'}{\partial\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right),\qquad \frac{\partial\mu'}{\partial\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right),$$

ce qui, dans la formule (332), permet d'intégrer par parties les deux derniers termes entre parenthèses, et d'écrire finalement

$$(333)\quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\alpha}=\int_{t_A}^{t_B}\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\right)\right]\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\right)\right]\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right\}dt+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right]_{t_A}^{t_B}.$$

Nous avons maintenant tout intérêt à écrire cette formule indépendamment de α, en substituant aux dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ des différentielles : il suffit à cet effet de multiplier les deux membres par l'accroissement infinitésimal $\delta\alpha$ de la variable indépendante α. On obtient ainsi la variation de $\mathfrak{L}$

$$(334)\quad \delta\mathfrak{L}=\int_{t_A}^{t_B}\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\right)\right]\delta\lambda+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\right)\right]\delta\mu\right\}dt+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\delta\lambda+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\delta\mu\right]_{t_A}^{t_B}.$$

En remplaçant dans cette formule la fonction φ par son expression

$$\sqrt{E\lambda'^2+2F\lambda'\mu'+G\mu'^2},$$

et en se reportant à l'expression de la courbure géodésique obtenue au n° 139, on retrouverait bien entendu la formule

$$(335) \qquad \delta\mathcal{L} = \mathbf{T}_B . \delta B - \mathbf{T}_A . \delta A - \int_{AB} \rho \cos\theta \quad \Gamma . \delta M \quad ds.$$

Nous n'insisterons pas sur cette vérification. Nous allons entreprendre l'étude des lignes dont la courbure géodésique est nulle. Elle nous montrera qu'un arc suffisamment petit d'une de ces lignes est sur la surface le plus court chemin entre ses deux extrémités. Par suite, ces lignes sont précisément celles qui ont été citées au n° 126 sous le nom de *lignes géodésiques*.

200. Théorie des lignes géodésiques. — Considérons donc une ligne dont la courbure géodésique est nulle, ou, si l'on préfère, dont le plan osculateur est normal en chaque point à la surface S. Si l'on veut déterminer les coordonnées curvilignes λ, μ d'un point d'une telle courbe en fonction du paramètre t, on est conduit à intégrer un système différentiel du second ordre

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\right) = 0.$$

Remarquons d'ailleurs que dans le cas actuel, la fonction φ est homogène et du premier degré par rapport aux variables λ' et μ'. De là, il résulte, d'après l'identité d'Euler,

$$\varphi = \lambda'\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'} + \mu'\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'},$$

d'où, en dérivant par rapport à t,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\lambda'\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\right) + \frac{d}{dt}\left(\mu'\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\right),$$

ou encore

$$\lambda'\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \mu'\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \lambda''\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'} + \mu''\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'} = \lambda''\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'} + \lambda'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\right) + \mu''\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'} + \mu'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\right),$$

il reste finalement l'identité

$$\lambda'\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'}\right)\right] + \mu'\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu'}\right)\right] = 0,$$

qui montre que les deux équations différentielles précédentes ne sont pas indépendantes; c'est ce qu'il était facile de prévoir : la propriété géométrique que nous avons imposée à la courbe inconnue en chacun de ses points laisse absolument arbitraire le choix de la représentation paramétrique qui sera adoptée pour la définir. Sur les deux fonctions $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ l'une au moins est donc arbitraire, et il eût été absurde d'aboutir à un système de deux équations indépendantes déterminant entièrement (ou à des constantes près) ces fonctions.

On pourra supposer, dans le cas général, que le paramètre t est l'une des coordonnées λ ou μ, soit par exemple $t = \lambda$. On obtiendra ainsi une équation du second ordre

$$F\left(\frac{d^2\mu}{d\lambda^2}, \frac{d\mu}{d\lambda}, \mu, \lambda\right) = 0.$$

Par chaque point du plan il passe donc une infinité de ces lignes dont la courbure géodésique est partout nulle : pour achever de déterminer l'une de ces lignes, il suffira, d'après les théorèmes généraux sur les équations différentielles, de faire connaître en outre la tangente en ce point.

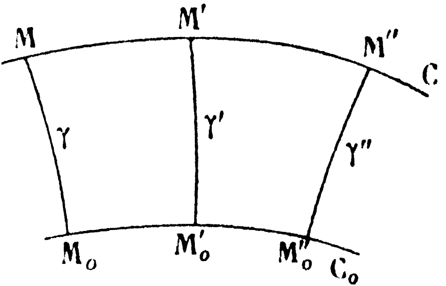
Avant d'aller plus loin, nous aurons à faire connaître quelques propriétés des lignes à courbure géodésique nulle, que nous appellerons en abrégé : *lignes* γ.

Appliquons la formule (335) à un arc AB d'une ligne γ, l'arc varié A'B' étant emprunté à une ligne infiniment voisine, mais quelconque. Il vient

$$(336) \qquad \delta\mathfrak{L} = \mathbf{T}_B . \delta B - \mathbf{T}_A . \delta A.$$

Cette formule est la source de conséquences importantes. Considérons les trois quantités $\delta\mathfrak{L}$, $\mathbf{T}_A . \delta A$ et $\mathbf{T}_B . \delta B$. Si deux d'entre elles sont nulles, il en sera de même de la troisième. En particulier, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Si un déplacement infinitésimal laisse inaltérée la longueur d'un arc AB d'une ligne à courbure géodésique nulle, l'orthogonalité à cette ligne, en A, du déplacement de A exige l'orthogonalité à cette ligne, en B, du déplacement de B.



D'après cela, traçons sur la surface une courbe quelconque C_0, et menons en ses divers points les lignes γ qui lui sont orthogonales : à partir de ces points M_0, M'_0, M''_0, ..., portons sur les courbes correspondantes $\gamma, \gamma', \gamma''$, ..., des arcs M_0M, $M'_0 M'$, $M''_0 M''$, ... ayant même longueur $\mathfrak{L}$. Le lieu de M, M', M'' ..., sera, d'après le théorème précédent, une trajectoire orthogonale des courbes $\gamma, \gamma', \gamma''$, ... En faisant varier continûment $\mathfrak{L}$, on obtiendra donc le système des trajectoires orthogonales aux courbes $\gamma, \gamma', \gamma''$, ...

Supposons qu'on définisse chaque point M de la surface S par les deux paramètres suivants :

1° le paramètre μ, qui spécifie la position de M_0 sur la courbe C_0 (1); sur la surface S, les lignes $\mu = \text{const.}$ sont donc les lignes γ orthogonales à C_0;

2° le paramètre λ, qui exprime la longueur de l'arc M_0M. Les lignes $\lambda = \text{const.}$ sont les lignes C, trajectoires orthogonales de nos lignes γ particulières.

Dans ces conditions, l'élément linéaire sera nécessairement de la forme

$$(337) \qquad ds^2 = d\lambda^2 + K^2 d\mu^2,$$

car ces lignes coordonnées étant orthogonales, il n'y a pas de terme rectangle, et ensuite le long des lignes $\mu = \text{const.}$, on a $ds = d\lambda$.

Nous sommes maintenant à même d'établir la proposition suivante :

Toute ligne γ à courbure géodésique nulle est une ligne géodésique, c'est-à-

(1) Nous nous limitons à une portion de la surface S assez petite pour que chaque point M provienne, dans la construction précédente, d'un point M_0 unique.

dire fournit sur chacune de ses portions suffisamment petites, le minimum de la distance (mesurée sur la surface) entre les extrémités de cette portion.

En effet, à la courbe C_0 du raisonnement précédent, il nous est possible de substituer un point O, avec lequel seront confondus les points M_0, M'_0, M''_0, ... Nous considérerons alors toutes les lignes à courbure géodésique nulle, soient γ, γ', γ'', ... issues de O, et portant sur chacune d'elles à partir de O une longueur constante, nous obtiendrons des courbes fermées C coupant encore orthogonalement les lignes γ, et offrant dans le voisinage de O la disposition d'une famille de cercles concentriques. On pourra donc délimiter une portion de la surface avoisinant le point O et limitée à une courbe C particulière, soit C_1, telle que par chaque point M de cette région passe une ligne γ et une seule issue de O. L'arc OM de cette ligne γ est alors nécessairement inférieur à tout autre chemin joignant le point O au point M : sa valeur est en effet le λ du point M. Pour un autre chemin, la longueur serait donnée par l'intégrale

$$\int_0^\lambda \sqrt{1+K^2\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2}\,d\lambda,$$

où λ a la valeur précédente. Le théorème est ainsi démontré [1].

201. Expression particulière de la courbure totale. — Revenons au système de coordonnées le plus général qui nous a conduit à la formule (337) : l'élément linéaire prenant alors une forme particulièrement simple, il est intéressant, dans ces conditions, de rechercher l'expression de la courbure totale. D'après la formule (153) du n° 133, nous avons dans le cas général

$$\frac{1}{R_1R_2}=\frac{E'G'-F'^2}{EG-F^2},$$

$E'G'-F'^2$ est lui-même donné par la formule (139),

$$\begin{aligned}E(hh''-h'^2)+F(hk''+kh''-2h'k')+G(kk''-k'^2)\\+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial\lambda^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial\mu}+\frac{\partial^2 E}{\partial\mu^2}\right)+E'G'-F'^2=0,\end{aligned}$$

où (h, k), (h', k'), (h'', k'') sont les composantes contrevariantes tangentielles des vecteurs $\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}$. Il s'agit donc de faire ici une simple application numérique avec $E=1$ et $F=0$. Calculons d'abord les h, k, etc.... En conservant les notations du n° 128, nous aurons pour les composantes covariantes tangentielles (σ, τ), (σ', τ'), (σ'', τ'') des vecteurs précédents, les valeurs suivantes [se reporter aux formules (126), (127) du n° 125 et aux formules (I), (II) du n° 128] :

$$\text{(I)}\left\{\begin{aligned}\sigma&=0,\\ \sigma'&=0,\\ \sigma''&=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda};\end{aligned}\right.\qquad \text{(II)}\left\{\begin{aligned}\tau&=0,\\ \tau'&=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda},\\ \tau''&=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\mu}.\end{aligned}\right.$$

(1) Cette démonstration est due à G. Darboux.

En utilisant les formules de passage des composantes covariantes aux composantes contrevariantes [voir formules (φ) du n° 128], nous obtenons

$$(\text{III})\left\{\begin{aligned} h &= 0,\\ h' &= 0,\\ h'' &= -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda};\end{aligned}\right. \qquad (\text{IV})\left\{\begin{aligned} k &= 0,\\ k' &= \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial\lambda},\\ k'' &= \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial\mu}.\end{aligned}\right.$$

Il reste alors

$$E'G' - F'^2 - \frac{1}{4G}\left(\frac{\partial G}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial\lambda^2} = 0.$$

Or $EG - F^2$ se réduit ici à G. Il vient donc

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{1}{4G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2G}\frac{\partial^2 G}{\partial\lambda^2}.$$

Nous avons adopté d'ailleurs une notation spéciale et posé $G = K^2$. L'opportunité de cette écriture apparait maintenant, car elle fournit pour expression définitive de la courbure totale

$$(338)\qquad \frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{K}\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda^2}.$$

Dans les mêmes conditions, nous allons évaluer la courbure géodésique.

202. Expression correspondante de la courbure géodésique. — Au n° 139, nous avons appelé *vecteur de courbure géodésique* la composante tangentielle de $\frac{d^2M}{ds^2}$, laquelle a pour composantes covariantes les produits scalaires $\frac{d^2M}{ds^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial\lambda}$ et $\frac{d^2M}{ds^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial\mu}$. Pour calculer ceux-ci, nous avons écrit

$$\frac{dM}{ds} = \frac{\partial M}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{ds} + \frac{\partial M}{\partial\mu}\frac{d\mu}{ds},$$

d'où, en dérivant,

$$\frac{d^2M}{ds^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu}\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\mu}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \frac{\partial M}{\partial\lambda}\frac{d^2\lambda}{ds^2} + \frac{\partial M}{\partial\mu}\frac{d^2\mu}{ds^2}.$$

Pour évaluer les produits scalaires de ce vecteur par chacun des vecteurs $\frac{\partial M}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial\mu}$, nous nous reporterons encore aux formules (126) et (127) du n° 123, qui s'écrivent ici sous forme réduite :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2} &= \sigma = 0,\\ \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu} &= \sigma' = 0,\\ \frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2} &= \sigma'' = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda},\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2} &= 0,\\ \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu} &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda},\\ \frac{\partial M}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\mu},\end{aligned}\right.$$

[puisqu'en vertu de (337), nous avons $E=1$, $F=0$]. Nous obtenons ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\,M}{ds^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial\lambda} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2+\frac{d^2\lambda}{ds^2},\\ \frac{\partial^2 M}{ds^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial\mu} &= \frac{\partial G}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\mu}{ds}+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\mu}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2+G\frac{d^2\mu}{ds^2}.\end{aligned}\right.$$

Pour les coordonnées contrevariantes du même vecteur, nous obtiendrions, en vertu des formules (121) du n° 124, les valeurs respectives

$$u=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2+\frac{d^2\lambda}{ds^2}$$

et

$$v=\frac{1}{G}\left[\frac{\partial G}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\mu}{ds}+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\mu}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2\right]+\frac{d^2\mu}{ds^2}.$$

Imaginons que la courbe étudiée soit définie par une équation $\lambda=f(\mu)$. On peut donner aux expressions précédentes une forme adaptée à ce mode de représentation. On écrira à cet effet

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+G\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2=1.$$

De la relation

(339) $$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{d\lambda}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{ds},$$

on tire alors

$$\left[\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2+G\right]\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2=1,$$

d'où

$$\frac{d\mu}{ds}=\left[\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2+G\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mu}{ds^2}&=-\left[\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2+G\right]^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\frac{d^2\lambda}{d\mu^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu}+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\mu}\right)\frac{d\mu}{ds}\\ &=-\frac{\dfrac{d\lambda}{d\mu}\dfrac{d^2\lambda}{d\mu^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{d\mu}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial\mu}}{\left[\left(\dfrac{d\lambda}{d\mu}\right)^2+G\right]^2}.\end{aligned}$$

On tire ensuite de (339)

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2}=\frac{d\lambda}{d\mu}\frac{d^2\mu}{ds^2}+\frac{d^2\lambda}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d^2\lambda}{ds^2}&=\frac{d^2\lambda}{d\mu^2}\frac{1}{\left(\dfrac{d\lambda}{d\mu}\right)^2+G}-\frac{\left(\dfrac{d\lambda}{d\mu}\right)^2\dfrac{d^2\lambda}{d\mu^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial\lambda}\left(\dfrac{d\lambda}{d\mu}\right)^2+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial\mu}\dfrac{d\lambda}{d\mu}}{\left[\left(\dfrac{d\lambda}{d\mu}\right)^2+G\right]^2}\\ &=\frac{G\dfrac{d^2\lambda}{d\mu^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial\lambda}\left(\dfrac{d\lambda}{d\mu}\right)^2-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial\mu}\dfrac{d\lambda}{d\mu}}{\left[\left(\dfrac{d\lambda}{d\mu}\right)^2+G\right]^2}.\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans les expressions des composantes contrevariantes, celles-ci deviennent respectivement

$$u = \frac{G\left(\frac{d^2\lambda}{d\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right) - \frac{d\lambda}{d\mu}\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \mu}\right)}{\left[G + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2\right]^2},$$

$$v = \frac{-\frac{d\lambda}{d\mu}\left(\frac{d^2\lambda}{d\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right) + \frac{1}{G}\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \mu}\right)}{\left[G + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2\right]^2}.$$

Le carré de la courbure géodésique aura pour expression $u^2 + Gv^2$, ce qui donne immédiatement

$$\rho^2 \sin^2\theta = \frac{G\left[\frac{d^2\lambda}{d\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \lambda} - \frac{d\lambda}{d\mu}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial \mu}\right)\right]^2}{\left[G + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2\right]^3};$$

on peut donc prendre pour la courbure géodésique l'expression suivante

$$\rho \sin\theta = \pm \frac{\sqrt{G}}{\left[G + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2\lambda}{d\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \lambda} - \frac{d\lambda}{d\mu}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial \mu}\right)\right],$$

ou, en introduisant la fonction $K = \sqrt{G}$,

$$(340) \qquad \rho \sin\theta = \pm \frac{K}{\left[K^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d^2\lambda}{d\mu^2} - K\frac{\partial K}{\partial \lambda} - \frac{d\lambda}{d\mu}\left(\frac{2}{K}\frac{\partial K}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial \mu}\right)\right].$$

On peut faire une application de cette formule au cas du plan et des coordonnées polaires. La fonction K se réduit alors purement et simplement à λ, et la courbure géodésique à la courbure ordinaire, dont la valeur devient ainsi $\left(\text{en posant } \frac{d\lambda}{d\mu} = \lambda'\right)$

$$\pm \frac{\lambda\lambda'' - 2\lambda'^2 - \lambda^2}{(\lambda^2 + \lambda'^2)}$$ (1).

Nous n'avons développé ce calcul qu'à titre d'exemple d'application des méthodes générales indiquées dans notre exposé de la théorie des surfaces.

C'est également à titre d'exercice de calcul que nous établirons, dans cette voie. la relation classique entre la courbure totale et la courbure géodésique (2).

(1) Le signe à prendre est (—) ou (+) suivant que le sens positif des arcs concorde ou non avec le sens des angles μ croissants.

(2) La véritable démonstration de cette proposition résulte des considérations exposées au n° 207, 4°.

203. Relation entre la courbure totale et la courbure géodésique. — Considérons l'intégrale

$$\int \rho \sin\theta \, ds$$

étendue à un arc de courbe susceptible d'être représenté sous la forme $\lambda = f(\mu)$. L'élément de cette intégrale a pour valeur

$$\frac{K}{K^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2}\left[-\frac{d^2\lambda}{d\mu^2} + K\frac{\partial K}{\partial \lambda} + \frac{d\lambda}{d\mu}\left(\frac{2}{K}\frac{\partial K}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial \mu}\right)\right] d\mu$$

et peut également s'écrire

$$d\left[\operatorname{arc\,tg}\left(K\frac{d\mu}{d\lambda}\right)\right] + \frac{1}{K^2 + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2}\left[K^2\frac{\partial K}{\partial \lambda} + \frac{\partial K}{\partial \lambda}\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2\right] d\mu$$

ou finalement

$$d\left[\operatorname{arc\,tg}\left(K\frac{d\mu}{d\lambda}\right)\right] + \frac{\partial K}{\partial \lambda} d\mu.$$

Si nous substituons à l'arc considéré précédemment une courbe fermée, l'expression $\int \rho \sin\theta \, ds$ deviendra une intégrale curviligne étendue à cette courbe et d'expression

$$\int d\left[\operatorname{arc\,tg}\left(K\frac{d\mu}{d\lambda}\right)\right] + \frac{\partial K}{\partial \lambda} d\mu.$$

Cette intégrale se décompose en deux, dont l'une porte sur la différentielle d'une fonction multiforme et dont la seconde peut, par l'intermédiaire de la formule de Green, être transformée en une intégrale double. Cette intégrale double sera

$$\int\int \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} d\mu \, d\lambda$$

ou encore, en remarquant que l'élément de surface est $dS = K d\lambda d\mu$,

$$\int\int \frac{1}{K}\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} dS,$$

c'est-à-dire, d'après les résultats du numéro précédent,

$$-\int\int \frac{dS}{R_1 R_2}.$$

Toutefois, quelques précautions doivent être prises au moment de cette transformation de calcul. Effectivement, nous avons adopté ici des coordonnées géodésiques générales, c'est-à-dire nous avons pris pour lignes de coordonnées un système de lignes géodésiques à un paramètre d'une part et leurs trajectoires orthogonales d'autre part.

Le cas le plus simple à traiter est celui où, dans tout le domaine d'intégration, les paramètres λ et μ peuvent être regardés comme des fonctions uniformes du point dont ils déterminent la position sur la surface. L'application de la formule de Green, sous la forme même où nous venons de l'indiquer, est alors légitime. La quantité arc tg K $\frac{d\mu}{d\lambda}$ représente d'ailleurs l'angle φ du vecteur $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et du vecteur **T** de la tangente au contour d'intégration. Dans les conditions précises qui viennent d'être indiquées, cet angle s'accroît de 2π pour un tour effectué sur le contour C, à supposer d'ailleurs que C soit une ligne fermée et sans point double, et en outre délimitant une portion S de la surface considérée réductible par déformation continue à un point [1]. On obtient donc la formule

$$\int_C \rho \sin\theta\, ds = 2\pi - \int\int \frac{dS}{R_1 R_2}. \tag{341}$$

Mais il y a lieu de reprendre entièrement le raisonnement précédent si le système de coordonnées employé est tel que λ et μ ne soient plus des fonctions uniformes de la position du point qu'ils déterminent. Un pareil cas se présente si l'on prend comme lignes coordonnées toutes les géodésiques issues d'un point A et si l'aire S contient ce point à son intérieur. On forme alors un système analogue à celui des coordonnées polaires dans le plan, et où chaque point est susceptible d'une infinité de couples λ, μ. Nous conviendrons alors que la distance géodésique λ au point A est essentiellement positive, et pour appliquer correctement la formule de Green, nous attribuerons à μ, en chaque point de l'aire utile, une valeur unique, en ayant soin d'entourer le point A d'une ligne fermée γ, d'équation $\lambda = \varepsilon$ (où ε est un nombre positif arbitrairement petit) et en pratiquant une coupure qui joint un point de γ à un point du contour C. On obtient ainsi une aire dans laquelle λ et μ sont fonctions uniformes de M. On peut donc appliquer la formule de Green. A cause de la périodicité de K et de ses dérivées par rapport à μ, les intégrales le long des deux bords de la coupure se détruisent. L'aire délimitée par γ étant aussi petite qu'on veut et l'expression $\frac{1}{R_1 R_2}$ étant continue dans l'aire totale délimitée par C, l'application de la formule de Green nous donne alors

$$\int_C (\rho \sin\theta\, ds - d\varphi) - \int_\gamma (\rho \sin\theta\, ds - d\varphi) = -\int\int_S \frac{dS}{R_1 R_2},$$

en réservant les notations $\int_C$ et $\int_\gamma$ pour désigner des intégrales étendues à ces contours, lorsqu'on les parcourt en sens direct.

Or, après un tour sur le contour C (voir les figures du n° 207) l'angle φ, après avoir éprouvé une variation continue, reprend sa valeur primitive. Il en est de même le

(1) Par exemple, étant donné un tore, on ne pourrait prendre pour C ni un cercle méridien ni un parallèle de ce tore. Le raisonnement précédent suppose également que C ne présente pas de points anguleux. L'hypothèse de la présence de points anguleux sera examinée plus loin, à l'occasion d'une autre démonstration de la même formule, voir n° 207.

long de la ligne γ. D'autre part, cette ligne est aussi petite qu'on veut. Elle est donc située dans une région de la surface qu'on peut, avec une approximation indéfinie, assimiler à un plan. Son rayon de courbure géodésique $\rho \sin\theta$ tend d'ailleurs vers le rayon de courbure de la projection de cette ligne sur le plan tangent en A, c'est dire que $\int_\gamma \rho \sin\theta \, ds$ tend vers 2π.

Ainsi, l'emploi d'un système de coordonnées offrant en A une singularité nous permet de retrouver la formule (341), obtenue à l'aide d'un autre système, régulier dans toute l'aire utile. Il ne pouvait en être autrement, puisque cette formule établit une relation de la géométrie autonome de la surface, et que la représentation paramétrique qui intervient dans le raisonnement à titre auxiliaire doit en fin de compte n'exercer aucune influence sur les résultats.

204. Variation infinitésimale de l'aire d'une portion de surface courbe. — Laissant de côté toute théorie générale sur les fonctions dépendant d'une surface, nous nous contenterons d'étudier la question suivante :

Évaluer la variation infinitésimale subie par l'aire d'une portion de surface courbe.

Soit δM le déplacement infinitésimal subi par un point M de la surface, déplacement qui l'amène en M'. Nous considérerons δM comme la somme géométrique d'un déplacement tangentiel et d'un déplacement normal. Puisqu'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, la variation infinitésimale cherchée sera la somme des variations partielles qui correspondent :

1° à la déformation provoquée par l'ensemble des déplacements tangentiels des différents points ;

2° à la déformation provoquée par l'ensemble des déplacements normaux.

Nous allons calculer successivement ces variations partielles, que nous appellerons en abrégé *variation tangentielle* et *variation normale*.

Variation tangentielle. — Dans un déplacement tangentiel infinitésimal, on voit immédiatement que la variation de l'aire est donnée par la formule

$$\delta_t \mathcal{A} = -\int_C \Gamma . \delta_t M ds,$$

en désignant par Γ le vecteur unité de la normale géodésique intérieure, et en réservant la caractéristique δ_t pour représenter les déplacements tangentiels et les variations qui en résultent. On peut d'ailleurs remarquer que chaque déplacement δM est la somme géométrique du déplacement $\delta_t M$ qui en est la composante tangentielle et d'un déplacement normal $\nu \delta n$ orthogonal à Γ. On a donc

$$\Gamma . \delta_t M = \Gamma . \delta M$$

et, par suite, nous aurons finalement

$$\delta_t \mathcal{A} = -\int_C \Gamma . \delta M ds. \tag{342}$$

Variation normale. — Supposons maintenant que chaque point M de la portion de surface considérée éprouve un déplacement infiniment petit $\nu \delta n$, où δn désigne

une certaine fonction scalaire du point M, qu'on pourra toujours supposer de la forme $\frac{\partial n}{\partial \alpha}\delta\alpha$ (si l'on trouve plus commode de ramener le raisonnement à celui de la dérivation de l'intégrale qui exprime l'aire cherchée, par rapport à un paramètre α, dont dépendrait la surface à laquelle est affectée cette aire).

Cela posé, traçons sur la portion de surface S, un système double de lignes orthogonales, ce qui nous permettra d'envisager l'aire $\mathcal{A}$ comme la limite d'une somme de petits rectangles.

Envisageons l'un de ces rectangles, dont les côtés sont deux vecteurs infinitésimaux d_1M et d_2M, de longueurs respectives d_1s et d_2s.

Après la déformation infinitésimale qui résulte du système de déplacements normaux $\nu\,\delta n$, l'accroissement de l'aire de ce rectangle sera

$$d_2s\,\delta\,d_1s + d_1s\,\delta\,d_2s.$$

Or, reportons-nous à la formule (330) qui donne la variation de la longueur d'un arc de courbe. Les arcs variables sont ici orthogonaux aux déplacements de leurs extrémités. Pour chacun de ces arcs, la formule (330) est donc réduite à son dernier terme. Mais les arcs considérés sont des arcs élémentaires, si bien que pour chacun d'eux l'intégrale qui figure dans la formule (330) est réduite à un élément unique. Nous avons donc tout simplement

$$\delta d_1s = -\rho_1\delta n\quad \nu.\mathbf{N}_1 ds_1,$$

en désignant par ρ_1 le rayon de courbure en M, et par $\mathbf{N}_1$ le vecteur unité de la normale principale en M, pour l'arc d_1s. On a d'ailleurs, d'après

$$\rho_1\nu.\mathbf{N}_1 = \frac{1}{\mathcal{R}_1},$$

en appelant $\mathcal{R}_1$ la valeur algébrique du rayon de courbure principal de la section normale de S tangente en M à d_1s, c'est-à-dire le nombre tel que l'on ait

$$\mathbf{MK}_1 = \mathcal{R}_1\nu,$$

K_1 désignant le centre de courbure de cette section principale.

On en déduit que, pour le rectangle infinitésimal considéré, d'aire $d\sigma$, l'accroissement d'aire sera

$$(343)\qquad \delta d\sigma = -\left(\frac{1}{\mathcal{R}_1}+\frac{1}{\mathcal{R}_2}\right)\delta n\, d\sigma.$$

Le caractère de cette formule et la propriété additive de l'aire exigent d'ailleurs que le résultat s'applique non seulement à un rectangle doué d'une orientation particulière, mais encore à tout élément superficiel, infiniment petit dans toutes ses dimensions. On en conclut qu'en chaque point M, la somme des courbures de deux sections

normales rectangulaires a une valeur indépendante de l'angle qui détermine la position du système de leurs plans. C'est le théorème d'Euler, que nous avions déjà établi par une autre méthode (voir fin du n° 132).

A l'expression $\frac{1}{\mathcal{R}_1}+\frac{1}{\mathcal{R}_2}$ nous avons donné le nom de *courbure moyenne.* Cette courbure moyenne est donc un élément primordial dans le calcul de la variation d'une aire. De la formule (343) qui donne la variation d'une aire infiniment petite, on passe à la variation d'une aire finie par la formule

$$\delta_n \int\int_S d\sigma = -\int\int_S k\delta n d\sigma.$$

Remarque. — La démonstration précédente n'est pas rigoureuse, mais du moins explique-t-elle, dans la formule précédente, l'origine de la courbure moyenne. Il n'est pas difficile de construire, *a posteriori*, une démonstration analytique rigoureuse, en se servant de l'expression d'une aire et de la formule de dérivation d'une intégrale : il ne s'agit plus que d'opérer après coup une *vérification.*

Le problème du calcul de la variation totale d'une aire est donc résolu par la formule

$$(344) \qquad \delta \mathcal{A} = -\int_C \Gamma . \delta M ds - \int\int_S k\delta n d\sigma.$$

205. Surfaces à courbure moyenne nulle. — De la formule précédente, on déduit des propriétés des surfaces à courbure moyenne nulle. Supposons qu'une portion S d'une telle surface varie, de manière à demeurer constamment normale à la surface du tube engendré par la courbe C qui délimite S. Les deux intégrales du second membre étant nulles, on voit que l'on aura constamment $\delta\mathcal{A}=0$. Par suite, l'aire $\mathcal{A}$ demeurera constante. Dans le même ordre d'idées, nous allons établir un théorème d'importance capitale.

Théorème. — *Toute surface à courbure moyenne nulle est une surface minima, en ce sens que chaque portion assez petite de cette surface fournit le minimum des aires limitées au même contour que cette portion.*

Soit S_0 une surface à courbure moyenne nulle. Formons une famille de surfaces à un paramètre, chacune de ces surfaces étant à courbure moyenne nulle, et l'une d'elles étant précisément S_0. Nous admettrons que si la portion utile de S_0 est suffisamment petite, on peut choisir la famille précédente de manière que les surfaces qui la composent présentent, au voisinage de S_0 et à l'intérieur du tube de trajectoires orthogonales dont la directrice est le bord de la portion utile, une disposition régulière, c'est-à-dire analogue à celle des sections droites d'un cylindre. Soit alors S une quelconque des surfaces précédentes. Prenons un système de coordonnées curvilignes, l'une des familles de surfaces coordonnées étant la famille des surfaces S, les deux autres familles se coupant mutuellement suivant les trajectoires orthogonales des surfaces S. L'élément linéaire de l'espace prendra la forme

$$(345) \qquad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 + Kdw^2,$$

en désignant par w celle des trois coordonnées qui demeure constante sur les surfaces S ; et en effet, à cause de l'orthogonalité de ces surfaces aux lignes $u =$ const., $v =$ const., le ds^2 ne doit pas contenir de termes en $du\,dv$, ni de termes en $dv\,dw$ [1]. Dans l'expression précédente, E, F, G, K sont des fonctions de u, v, w.

Chaque élément d'aire d'une surface $w =$ const., a pour expression

$$\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Considérons tous les éléments correspondants, c'est-à-dire interceptés sur les diverses surfaces $w =$ const^{es} par le tube de trajectoires orthogonales qui s'appuient sur le contour de l'un d'eux. D'après une remarque précédente, ils sont équivalents. On en conclut que $EG - F^2$ ne dépend pas de w.

Cela posé, menons par le bord de la portion utile de la surface S_0 une autre surface, définie en attribuant à w une certaine valeur en fonction de u et de v. Cette fonction étant connue, l'aire de la surface correspondante sera donnée par l'intégrale

$$\iint \sqrt{\left[E + K\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2\right]\left[G + K\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right] - \left[F + K\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\right]^2}\,du\,dv,$$

où le domaine de variation des uv n'est autre que la section droite du tube. Or cette intégrale peut s'écrire

$$\iint \sqrt{EG - F^2 + K\left[G\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + E\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right]}\,du\,dv.$$

La quantité entre crochets est positive, comme résultat de substitution du couple de valeurs $-\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial w}{\partial u}$ dans la forme quadratique $E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2$. D'ailleurs K est essentiellement positif. Donc l'intégrale en question surpasse nécessairement

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

et par suite l'aire de la portion considérée de S_0 est moindre que toute aire limitée au même contour. (C. Q. F. D.)

(1) Pour un raisonnement complet, on écrira

$$dM = \frac{\partial M}{\partial u}du + \frac{\partial M}{\partial v}dv + \frac{\partial M}{\partial w}dw$$

et, dans l'élévation au carré qui donne ds^2, on tiendra compte de l'orthogonalité du vecteur $\frac{\partial M}{\partial w}$ à chacun des vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u}$ et $\frac{\partial M}{\partial v}$.

VIII

Compléments sur la théorie des surfaces : méthode du trièdre mobile. Théorie du déplacement parallèle et théorème de Gauss. Champs scalaires ou vectoriels sur les surfaces. Paramètres différentiels. Applications.

206. Généralités et rapprochement de points de vue. — Nous avons étudié précédemment des champs scalaires ou vectoriels définis dans tout l'espace. On peut de même se proposer d'étudier de tels champs en les supposant définis seulement sur une surface. A vrai dire, il ne s'agit pas là d'un ordre d'idées absolument nouveau. Dans la théorie des surfaces telle que nous l'avons développée dans la section III de la troisième partie, nous avons indiqué le moyen de définir un champ de vecteurs tangents à la surface, en donnant, en fonction des deux variables qui en fixent un point, ou bien les composantes contrevariantes, ou bien les composantes covariantes du vecteur du champ en ce point. Bien plus, dans cet exposé, n'avons-nous pas ramené l'étude même de la surface (faite au point de vue métrique externe) à celle du champ des vecteurs unitaires normaux à cette surface? Effectivement, c'est bien là le point de vue dominant de la section III, et la méthode que nous avons utilisée à ce moment est fondée sur la considération de la dérivée géométrique du vecteur ν, dans les différentes directions tangentes à la surface. Elle s'inspire donc du même principe que l'étude, présentée dans les sections IV et V, des champs scalaires ou vectoriels définis, sinon dans l'espace entier, du moins dans une région à trois dimensions (voir spécialement n° 164).

En définitive, nous sommes ramenés à envisager la théorie des surfaces comme un rameau de la théorie des champs vectoriels. Inversement, pour développer cette dernière, certains géomètres se sont inspirés de la théorie des surfaces. Dans cet ordre d'idées, MM. C. Guichard et Axel Egnell [1] ont étendu aux champs vectoriels spatiaux la notion de *direction asymptotique* : appelons **V** (M) le vecteur du champ au point M, et soit δV son accroissement géométrique pour le déplacement infiniment petit δM. Nous dirons que la direction de ce déplacement est asymptotique si l'on a

$$\delta \mathrm{V} . \delta \mathrm{M} = 0,$$

ce qui paraîtra naturel à quiconque voudra bien se reporter à la définition des directions asymptotiques en un point d'une surface (n° 133) [2].

Ce court aperçu suffit à montrer l'importance des méthodes que nous avons développées. En raison même de cette importance, ces méthodes ont été employées, avec

(1) Le lecteur pourra consulter avec fruit la thèse de M. Axell Egnell : *Géométrie infinitésimale vectorielle*, Paris, 11 avril 1919. Voir dans le présent volume, une note en petits caractères, qui complète la première partie du n° 228.

(2) Les directions asymptotiques sont indéterminées pour les champs de moments et pour les champs obtenus en associant à chaque point un vecteur perpendiculaire à un plan tangent mené de ce point à une développable (notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, de MM. A. Egnell, t. CLXVIII, p. 1263; R. Garnier, t. CLXIX, p. 324; E. Goursat, t. CLXIX, p. 493. Voir aussi R. Garnier, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVIII, p. 106).

certaines variantes, par différents géomètres. Nous venons de présenter l'idée qui consiste à identifier l'étude d'une surface (ou d'une courbe) avec celle du champ des vecteurs unitaires qui sont normaux à cette surface (ou à cette courbe). C'est d'une idée voisine que Gaston Darboux s'est inspiré pour édifier sa méthode du *trièdre mobile* : son principe consiste en effet à identifier l'étude d'une surface (ou d'une courbe) avec celle des déplacements infinitésimaux subis par un trièdre trirectangle, attaché suivant un mode spécial à cette surface (ou à cette courbe). La théorie de Darboux est trop importante pour donner lieu ici à un exposé systématique. Nous ne lui consacrerons qu'une courte digression, et pour en dégager l'esprit nous aurons recours seulement à des problèmes particuliers.

207. Digression sur la théorie du trièdre mobile. — Au n° 160, nous avons dit quelques mots sur les déplacements infiniment petits. Soit un déplacement infinitésimal, réalisé pendant l'intervalle de temps dt : soit dM' le vecteur infiniment petit décrit par un point M', au cours de ce déplacement. Nous avons vu que le champ des vecteurs $\frac{dM'}{dt}$ (champ des vecteurs *vitesse*) s'obtient en composant la vitesse d'un point particulier M avec la vitesse prise par M' dans une rotation autour d'un axe issu de M, vitesse qui a pour expression

$$\Omega \wedge \mathbf{MM}',$$

Ω ayant une grandeur géométrique indépendante du point M, et qu'on nomme la *rotation instantanée.*

Cette rotation instantanée va jouer dans ce qui va suivre un rôle fondamental. Soit à faire l'étude métrique externe d'une courbe ou d'une surface. Attachons à cette multiplicité un trièdre, dont le sommet reste sur la courbe ou sur la surface, et dont une arête demeure ou tangente à la courbe, ou normale à la surface. Nous allons montrer que la rotation instantanée de ce trièdre est liée simplement aux éléments les plus fondamentaux que nous avons rencontrés dans l'étude de la courbe ou de la surface.

1° Déplacements a un paramètre. — Nous nous bornerons à étudier le cas particulier où le trièdre mobile est constamment le trièdre principal de la ligne décrite par son sommet, c'est-à-dire où ses arêtes sont respectivement la tangente, la normale principale et la binormale à cette courbe. Nous supposerons en outre que le temps est égal à l'abscisse curviligne du sommet M du trièdre. Les dérivées géométriques des vecteurs **T**, **N**, **B**, fournies par les formules de Frenet, expriment les différences géométriques

$$\frac{dM_1}{dt}-\frac{dM}{dt}, \qquad \frac{dM_2}{dt}-\frac{dM}{dt}, \qquad \frac{dM_3}{dt}-\frac{dM}{dt},$$

en appelant M_1, M_2, M_3 les points tels que

$$\mathbf{MM}_1=\mathbf{T}, \qquad \mathbf{MM}_2=\mathbf{N}, \qquad \mathbf{MM}_3=\mathbf{B}.$$

D'après le théorème fondamental sur les déplacements infinitésimaux d'une part, et les formules de Frenet de l'autre, nous avons donc

$$\Omega \wedge \mathbf{T} = \rho \mathbf{N},$$
$$\Omega \wedge \mathbf{N} = -\rho \mathbf{T} - \tau \mathbf{B},$$
$$\Omega \wedge \mathbf{B} = \tau \mathbf{N}.$$

La première et la dernière égalité montrent que Ω est orthogonal à **N**, ou encore que l'on a

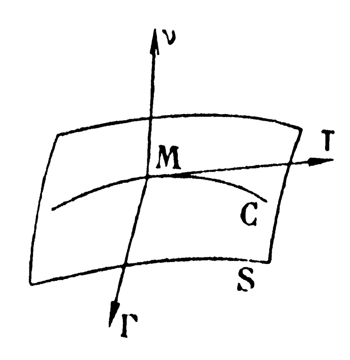
$$\Omega = \lambda \mathbf{T} + \mu \mathbf{B},$$

en désignant par λ et μ deux scalaires qu'on détermine en substituant cette valeur de Ω dans la seconde égalité, ce qui donne

$$\Omega = -\tau \mathbf{T} + \rho \mathbf{B}. \tag{346}$$

Ainsi, en direction, la rotation instantanée est dans le plan perpendiculaire à la normale principale. Ses projections sur la binormale et sur la tangente sont égales, au signe près, à la courbure et à la torsion : comme nous l'avions annoncé, la rotation instantanée est donc liée aux propriétés les plus saillantes que nous avons rencontrées dans l'étude infinitésimale de la courbe.

2° Application a une courbe d'une surface. — Considérons maintenant une courbe C, tracée sur une surface S, et cherchons la rotation instantanée d'un trièdre trirectangle, dont le sommet M décrit uniformément C, toujours suivant la loi $s = t$, les vecteurs unitaires de ses arêtes étant respectivement **T**, Γ, ν, c'est-à-dire ceux de la tangente à C, de sa normale géodésique et de la normale à S. Adoptant en général les notations du n° **131**, nous continuerons à désigner par **N** le vecteur unité de la normale principale à C en M, par **B** celui de la binormale, par θ l'angle **N**, ν. Nous aurons donc



$$\begin{cases} \nu = \mathbf{N}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta, \\ \Gamma = \mathbf{N}\sin\theta - \mathbf{B}\cos\theta. \end{cases}$$

La rotation instantanée du trièdre considéré est la somme géométrique de celle du trièdre principal de C, et de la rotation du premier trièdre par rapport à ce trièdre principal, laquelle a pour expression

$$\mathbf{T}\frac{d\theta}{ds}.$$

Soit Ω' la rotation totale. En tenant compte de la relation (346), nous aurons

$$\Omega' = \left(\frac{d\theta}{ds} - \tau\right)\mathbf{T} + \rho\mathbf{B} = \left(\frac{d\theta}{ds} - \tau\right)\mathbf{T} - \rho\cos\theta \quad \Gamma + \rho\sin\theta \quad \nu, \tag{347}$$

relation qui met en évidence la décomposition de Ω' suivant les vecteurs **T**, Γ, ν, c'est-à-dire suivant les arêtes du trièdre mobile. Au signe près, les composantes ainsi obtenues sont la torsion relative, la courbure normale et la courbure géodésique.

Ce résultat contient comme cas particulier la formule (147), qui donne $\frac{d\nu}{ds}$. En effet, d'après un théorème précédemment rappelé, on a

$$\frac{d\nu}{ds} = \Omega' \wedge \nu.$$

En remplaçant dans le second membre Ω' par l'expression qui précède, on retrouve la formule (147).

3° Déplacements a deux paramètres. — Soit une surface S, que nous armons d'un champ de trièdres trirectangles directs. Chaque point M de S est le sommet d'un de ces trièdres, dont la troisième arête est normale à S. Considérons l'ensemble des mouvements dans lesquels un trièdre emprunte ses positions successives au champ précédent. L'étude de leurs caractères communs relève d'une théorie spéciale, celle du déplacement à deux paramètres, ainsi dénommée pour rappeler que deux degrés de liberté sont offerts au trièdre en mouvement.

Nous nous bornerons ici à présenter quelques remarques très simples. Nous désignerons par **X**, **Y**, ν les vecteurs unités portés par les arêtes du trièdre du champ au point M. Supposons que, dans un mouvement de l'ensemble étudié, le sommet du trièdre passe en M, avec une vitesse bien déterminée **MV**, située d'après nos hypothèses, dans le plan tangent en M. Le point de départ de la théorie est le suivant :

De la donnée de **MV** *et du champ résultent les vitesses des points liés au trièdre* [1].

En effet, en donnant **MV**, on se donne par là même le déplacement infiniment petit dM, subi pendant le temps dt par le sommet du trièdre. Or au point M′, tel que **MM′** $= d$M, notre trièdre occupe une position bien déterminée, donc les déplacements infinitésimaux des points liés à ce trièdre sont bien déterminés. Il en est donc de même de leurs vitesses. Il s'ensuit qu'à chaque vitesse **MV** de M correspond une rotation instantanée Ω bien déterminée.

Soient Ω_1 et Ω_2 les déterminations particulières de cette rotation instantanée, lorsqu'on attribue successivement au point M les vitesses $\mathbf{MV}_1$ et $\mathbf{MV}_2$. D'après la règle de composition des transformations infinitésimales, à la vitesse

$$\mathbf{MV} = \lambda_1 \mathbf{MV}_1 + \lambda_2 \mathbf{MV}_2$$

correspondra une rotation instantanée

$$\Omega = \lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2\,;$$

car pendant le temps dt, la vitesse **MV** (attribuée à M) entraîne pour chaque point P, lié au trièdre mobile, un déplacement infinitésimal

$$d\mathrm{P} = d\mathbf{M} + \Omega \wedge \mathbf{MP}\,dt = (\mathbf{MV} + \Omega \wedge \mathbf{MP})\,dt$$

(1) Cet important résultat s'applique d'ailleurs (ainsi que le raisonnement fait ici pour le légitimer) au cas le plus général de la théorie du déplacement à deux paramètres, la troisième arête n'étant plus assujettie à être normale à la surface.

et puisqu'on a, en vertu de la règle de composition précédente,

$$dP = \lambda_1 d_1 P + \lambda_2 d_2 P,$$

et, en particulier,

$$dM = \lambda_1 d_1 M + \lambda_2 d_2 M,$$

il s'ensuit bien que

$$\Omega = \lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Cela posé, il est facile d'exprimer le vecteur Ω en fonction du vecteur **V**; à cet effet, désignons par C la trajectoire de M sur S, la loi du mouvement de M sur C étant arbitraire. En chaque point M de C, considérons, à titre auxiliaire, le trièdre **T**, Γ, ν et posons

$$(348) \qquad (\widehat{\mathbf{X}, \mathbf{T}}) = \varphi.$$

La rotation instantanée du trièdre **X**, **Y**, ν est la somme géométrique de la rotation instantanée $\Omega' \dfrac{ds}{dt}$ du trièdre **T**, Γ, ν, et de la rotation relative du premier trièdre par rapport au second, soit $-\nu \dfrac{d\varphi}{dt}$. La rotation totale est donc

$$\Omega = \left[\left(\frac{d\theta}{ds} - \tau\right)\mathbf{T} - \rho\cos\theta \quad \Gamma + \rho\sin\theta \quad \nu\right]\frac{ds}{dt} - \nu\frac{d\varphi}{dt}.$$

On a d'ailleurs

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}.$$

Si l'on suppose en particulier $\dfrac{ds}{dt} = 1$, on a simplement

$$\mathbf{V} = \mathbf{T},$$

$$(349) \qquad \Omega = \left(\frac{d\theta}{ds} - \tau\right)\mathbf{T} - \rho\cos\theta \quad \Gamma + \left(\rho\sin\theta - \frac{d\varphi}{ds}\right)\nu.$$

Comme nous l'avons annoncé, à chaque direction de tangente correspond une valeur bien déterminée pour Ω, c'est-à-dire pour chacune des trois quantités

$$\frac{d\theta}{ds} - \tau, \qquad \rho\cos\theta, \qquad \rho\sin\theta - \frac{d\varphi}{ds}.$$

Cette propriété nous était connue pour les deux premières quantités, d'après le calcul de $\dfrac{d\nu}{ds}$, mais non pour la troisième : et ce résultat montre la fécondité de la nouvelle méthode.

4° Application a la recherche d'une relation entre la courbure totale et la courbure géodésique. — Considérons l'intégrale

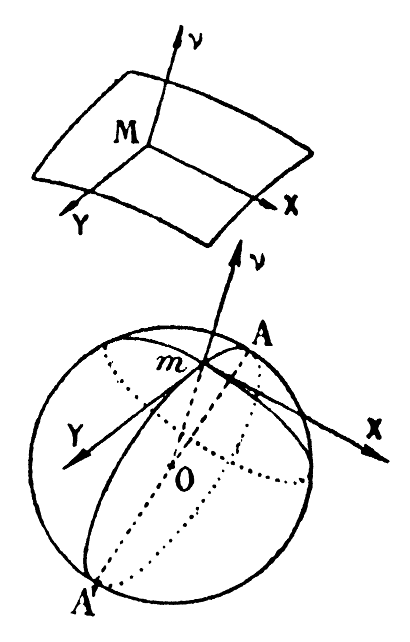
$$\int_C \rho \sin\theta \, ds$$

étendue à un contour fermé et sans point double de la surface S. Nous supposerons essentiellement que ce contour est réductible par déformation continue à un point et qu'il n'existe pas à son intérieur de point singulier de S. Il délimite alors une portion bien déterminée de la surface S, que nous désignerons précisément par la lettre S elle-même. Nous allons transformer l'intégrale curviligne qui précède en une intégrale double étendue à cette portion, et retrouver le résultat fondamental du n° 203.

A cet effet, opérons sur l'intégrale

$$\int\left(\rho \sin\theta - \frac{d\varphi}{ds}\right)ds,$$

dont l'élément est le produit de ds par la composante normale de la rotation instantanée d'un trièdre, dont le sommet M se meut sur le contour limite C, suivant la loi $s = t$, ce trièdre empruntant ses positions à un champ, défini en chaque point de S, champ qui pourra être choisi ultérieurement de manière à simplifier le calcul. Pour calculer $\rho\sin\theta - \frac{d\varphi}{ds}$, substituons à la surface S sa représentation sphérique, armée d'un champ équipollent à celui primitivement défini sur S. A chaque mouvement de M et du trièdre attaché à ce point sur la surface S correspondent des mouvements bien déterminés sur la représentation sphérique, et, pour évaluer la rotation instantanée, on peut recourir indifféremment, soit au mouvement du trièdre de sommet M, soit au mouvement synchrone du trièdre de sommet m. Par l'intermédiaire de ce dernier, cherchons la composante normale de la rotation, pour un choix favorable du champ **X**, **Y**, ν. A la surface de la sphère, il est commode de choisir deux points A et A′ diamétralement opposés, d'orienter l'arête X perpendiculairement à AA′, c'est-à-dire suivant la tangente à un parallèle, l'arête Y suivant la tangente au méridien. Caractérisons le point m de la sphère par sa colatitude



$$\widehat{\mathrm{AO}m} = v$$

et par sa longitude, c'est-à-dire par l'angle u du demi-plan AA′m avec un demi-plan origine. Lorsque le point M décrit, sur la surface S, l'arc ds, la colatitude et la longitude de m varient respectivement de du et de dv, et cela, pendant un intervalle de temps ds. L'expression de la vitesse de m est ainsi

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}\sin v\frac{du}{ds} + \mathbf{Y}\frac{dv}{ds}.$$

Or à la vitesse $\mathbf{V}_1 = \mathbf{X}\sin v$ correspond la rotation instantanée

$$\Omega_1 = -\mathbf{Y}\sin v + \nu\cos v;$$

à la vitesse $\mathbf{V}_2 = \mathbf{Y}$ correspond la rotation instantanée $\Omega_2 = -\mathbf{X}$, donc, à la vitesse $\mathbf{V}$ correspond la rotation instantanée

$$\Omega = -\mathbf{X}\frac{dv}{ds} + (-\mathbf{Y}\sin v + \nu\cos v)\frac{du}{ds}.$$

Ainsi la composante normale de Ω est $\cos v \dfrac{du}{ds}$, et nous sommes ramenés au calcul de l'intégrale

$$\int \cos v\, du$$

étendue au contour c de la portion de sphère qui correspond à S.

Supposons (cette restriction n'est d'ailleurs que provisoire) que cette portion corresponde biunivoquement à S. Il est toujours possible de satisfaire à cette condition lorsque l'aire initiale S est suffisamment petite, pourvu que le jacobien de la correspondance garde un signe constant. Ce jacobien exprime, comme nous le savons, le rapport de deux aires infiniment petites qui se correspondent; il a donc ici pour valeur $\dfrac{d\sigma}{dS} = \dfrac{1}{R_1R_2}$, en appelant dS un élément de l'aire initiale S et $d\sigma$ l'aire de l'élément qui lui correspond dans la représentation sphérique. Nous supposerons donc que dans l'aire initiale S la courbure totale garde un signe constant.

Cela posé, à la petite aire initiale S, il correspond sur la sphère, biunivoquement, une petite aire σ, et l'on peut faire alternativement les deux suppositions suivantes:

1° l'aire σ ne contient à son intérieur ni le point A, ni le point A';

2° elle contient l'un de ces points, par exemple le point A.

Il est évident d'ailleurs que les deux hypothèses doivent mener à une même formule, puisque le choix de A est arbitraire. Il est cependant intéressant de les examiner successivement.

Dans le premier cas, la formule de Green peut être appliquée sans difficulté, car il est possible dans toute l'aire σ, d'isoler une détermination de la longitude u, constituant une fonction uniforme et continue du point m (1). On obtient

$$\int \cos v\, du = -\int\int \sin v\, du\, dv = -\int\int d\sigma,$$

c'est-à-dire au signe près l'aire σ délimitée par le contour c.

En même temps, après un tour accompli par m sur c, l'angle φ s'est accru de 2π (voir fig. 1).

Nous retrouvons donc la formule

$$(330) \qquad \int_c \rho \sin\theta\, ds = 2\pi - \int\int_S \frac{dS}{R_1R_2}.$$

(1) A chaque point m correspond une colatitude v qui est comprise entre 0 et π, et qui est une fonction continue et uniforme de m.

Cherchons maintenant ce qui arrive lorsque l'aire σ entoure le point A. Pour appliquer correctement la formule de Green, on doit se placer dans des conditions telles qu'on puisse attribuer à chaque point m de l'aire σ des coordonnées u, v qui soient des fonctions continues et uniformes de la position de ce point. Or pour cela, nous devons isoler le point A par un petit cercle et pratiquer une coupure le long d'un méridien pour réunir la circonférence γ de ce cercle au contour c, comme l'indique la figure 2. Après cette précaution, nous pourrons nous permettre de traiter $\int \cos v\, du$ par la formule de Green, cette intégrale étant étendue au contour c, aux deux bords de la coupure parcourus en sens contraires, et enfin au cercle γ, parcouru en sens inverse de c.

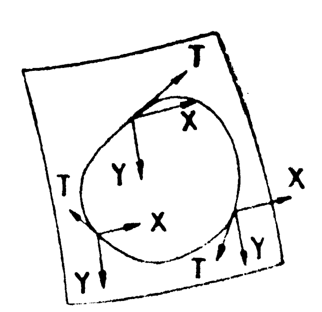


Fig. 1.

D'ailleurs, dans ce cas, après un tour accompli par m sur c, l'angle φ est revenu à sa valeur primitive. On peut donc écrire, en désignant spécialement par c et γ ces contours décrits dans le sens direct,

$$\int_c \rho \sin\theta\, ds = \int_c \cos v\, du - \int_\gamma \cos v\, du = -\int\int d\sigma,$$

or, cette formule est indépendante du rayon du cercle γ. Lorsque le point variable décrit ce cercle, $\cos v$ est aussi voisin qu'on veut de l'unité, tandis que u s'accroît de 2π. On retrouve donc bien la même formule que précédemment.

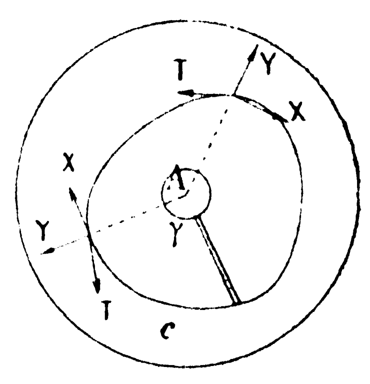


Fig. 2.

Le raisonnement exposé ci-dessus est emprunté à M. Hadamard [1]. Pour se débarrasser des restrictions qui ont été formulées dans le courant du raisonnement, on subdivisera l'aire initiale S de manière que chaque région partielle ait une courbure totale d'un signe constant et corresponde biunivoquement à sa représentation sphérique. Pour chaque subdivision, on aura alors

$$\int_c (\rho \sin\theta\, ds - d\varphi) = -\int\int \frac{dS}{R_1 R_2};$$

en ajoutant les égalités analogues, on obtiendra le même théorème pour l'aire totale [2]. Les seules conditions à retenir sont donc que c est une ligne fermée, sans point double et réductible à un point par une déformation continue.

Il peut arriver que le contour c offre des points anguleux : on pourra alors le considérer comme la limite d'un contour à tangente variant continûment en arrondissant les coins. Considérons l'intégrale de la courbure géodésique

$$\int \rho \sin\theta\, ds$$

(1) Il s'inspire de l'enseignement donné par l'éminent géomètre à l'École Normale (1910).

(2) Cela tient à ce que les deux membres sont des fonctions du premier degré du contour limite, au sens de M. Volterra.

prise le long d'un de ces petits arcs de raccordement. Cet arc est aussi petit qu'on veut; il est situé dans une région très petite de la surface, dont la géométrie peut, avec une approximation arbitrairement grande, se ramener à celle du plan. La limite de cette intégrale, lorsque l'arc de raccordement tend vers zéro, est donc l'angle dont a tourné le vecteur **T** au point considéré [puisque ρ sin θ peut être remplacé par le rayon de courbure $\frac{1}{\mathcal{R}}$, au sens de la géométrie plane, de l'arc de raccordement]. Moyennant cette précaution, on pourra généraliser la formule précédente à des contours qui présentent des points anguleux. Des points anguleux s'introduisent d'ailleurs nécessairement, lorsqu'il y a lieu, pour établir la formule (350), de recourir à une subdivision de l'aire S en régions partielles.

Comme application, envisageons un triangle géodésique $A_1A_2A_3$, et soient A_1, A_2, A_3 ses angles intérieurs. Aux sommets de ce triangle, la tangente subit les rotations $\pi - A_1$, $\pi - A_2$, $\pi - A_3$. Puisque la courbure géodésique de chaque côté est nulle, l'intégrale $\int_c \rho \sin \theta \, ds$ se réduit ici à $3\pi - (A_1 + A_2 + A_3)$. D'ailleurs nous avons toujours $\int_c d\varphi = 2\pi$, comme le montrerait le raisonnement consistant à arrondir les coins. Dans ces conditions, nous obtenons donc

$$\pi - (A_1 + A_2 + A_3) = -\iint \frac{dS}{R_1R_2},$$

ou finalement

$$(351) \qquad A_1 + A_2 + A_3 = \pi + \iint \frac{dS}{R_1R_2}.$$

Prenons par exemple une sphère : la courbure totale est positive; il s'ensuit que la somme des angles d'un triangle sphérique, ou, si l'on préfère, la somme des dièdres d'un trièdre, surpasse deux droits.

5° Sur un exemple remarquable de liaison non holonome fourni par la théorie du trièdre mobile. — On distingue en dynamique deux sortes de liaisons, les liaisons holonomes qui s'expriment par des relations en termes finis entre les coordonnées du système (le mot coordonnée signifiant l'un des paramètres qui permettent de fixer la position du système) et les liaisons non holonomes, qui se traduisent par des relations aux différentielles totales, non complètement intégrables.

La théorie du trièdre mobile conduit à un exemple remarquable de liaison non holonome, que nous citerons à cause du rôle important qu'il joue dans la théorie moderne des surfaces.

Soit une surface S. Si nous considérons un trièdre trirectangle dont le sommet M décrit cette surface, et dont la troisième arête lui reste constamment normale, ce trièdre possédera trois degrés de liberté [1]. Nous allons soumettre ce trièdre à une nouvelle liaison, par la condition suivante :

(1) Pour fixer la position de ce trièdre, on pourrait par exemple utiliser les deux coordonnées curvilignes λ, μ de son sommet M sur la surface, ainsi que l'angle φ, formé par la première arête X du trièdre d'un champ **X**, **Y**, ν dont on aurait armé arbitrairement la surface, avec la première arête du trièdre à définir.

La projection de la rotation instantanée Ω de ce trièdre sur la troisième arête est nulle.

Si la surface considérée était un plan, le vecteur Ω coïnciderait constamment avec sa projection sur la troisième arête du trièdre. Dans ce cas particulier, la liaison que nous venons de considérer se laisserait exprimer en termes finis, et imposerait aux deux premières arêtes du trièdre variable des directions fixes. Les seuls mouvements acceptables pour ce trièdre seraient donc les translations qui conservent le plan donné.

Mais, si la surface est choisie d'une manière absolument quelconque, la liaison précédente ne saurait être exprimée en termes finis. C'est là une conséquence de la théorie qui précède.

En effet, d'après cette théorie, la composante normale de la rotation instantanée a pour valeur

$$\rho \sin \theta - \frac{d\varphi}{ds}.$$

Supposons un instant que l'équation obtenue en annulant cette quantité puisse s'intégrer en termes finis, et conduise à une relation permettant d'exprimer φ en chaque point de la surface (une certaine constante arbitraire ayant été fixée). Nous serions ainsi conduits à affirmer ce qui suit : en vertu de la liaison donnée, nous sommes ramenés à envisager un champ de trièdres attachés à la surface S, champ dont le trièdre est bien déterminé en chaque point de S ; dans tout mouvement où les positions du trièdre mobile sont empruntées au champ, on aurait constamment

$$\rho \sin \theta - \frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

En particulier, en intégrant cette relation le long d'un contour fermé, on obtiendrait quel que soit ce contour (sous les seules réserves du § 4°)

$$\int\int \frac{dS}{R_1 R_2} = 0.$$

Nous arrivons donc à ce résultat capital :

Pour que la liaison puisse être ramenée à une équation en termes finis, il faut et il suffit que la surface soit à courbure totale nulle.

Cette possibilité de réduction constatée pour le plan s'étend donc aux surfaces à courbure totale nulle. A cette occasion, nous pourrons faire la remarque suivante : toute surface isométrique à un plan est à courbure totale nulle, en vertu du caractère géodésique de la courbure totale (n° 134). Inversement, soit une surface à courbure totale nulle. Prenons comme lignes coordonnées toutes les géodésiques issues d'un point O de cette surface et leurs trajectoires orthogonales. Les coordonnées d'un point M seront la distance géodésique $\lambda =$ OM et l'angle μ de la géodésique OM avec une géodésique origine. D'après les résultats du n° 200, l'élément linéaire sera $d\lambda^2 + K^2 d\mu^2$, où K^2 est un infiniment petit équivalent à λ^2, quel que soit μ. La fonction K sera donc astreinte aux conditions $\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} = 0$, quel que soit λ (n° 201) et

$K(0, \mu) = 0, \frac{\partial K}{\partial \lambda}(0, \mu) = 1$. L'ensemble de ces conditions fournit $K = \lambda$, ce qui montre que l'élément linéaire obtenu pour la surface est précisément celui du plan en coordonnées polaires. Elle est donc bien isométrique à un plan.

208. Si la surface n'est pas à courbure totale nulle, et si l'on en isole une portion S simplement connexe par un contour fermé C, un trièdre dont le sommet fait un tour sur C, et qui dans son mouvement reste soumis à la liaison qui nous occupe, ne revient pas à sa position initiale. Proposons-nous d'évaluer l'angle dont il faut faire tourner, autour de la troisième arête, la position initiale du trièdre pour l'amener à coïncider avec la position finale. Rappelons à cet effet le résultat obtenu précédemment : en armant la surface d'un champ de trièdres **X**, **Y**, ν, et en posant

$$\widehat{\mathbf{X}, \mathbf{T}} = \varphi$$

(où **T** est le vecteur unité de la tangente à la courbe C), nous avons établi que l'on a, pour le trièdre du champ,

$$\int_C \left(\rho \sin\theta - \frac{d\varphi}{ds}\right) ds = -\int\int \frac{dS}{R_1 R_2}.$$

D'autre part, désignons par ξ, η, ν les vecteurs unités des arêtes du trièdre qui coïncide initialement avec le trièdre du champ, mais qui est soumis à la liaison étudiée. Posons

$$\widehat{\xi, \mathbf{T}} = \psi.$$

On a constamment, en vertu de la liaison,

$$\rho \sin\theta - \frac{d\psi}{ds} = 0$$

et par suite, la relation entre la courbure géodésique de C et sa courbure totale prend la forme

$$\int_C d(\varphi - \psi) = \int\int \frac{dS}{R_1 R_2}.$$

A l'instant initial $\varphi - \psi$ est nul. Donc, après un tour, $\varphi - \psi$ a pris la valeur

$$\int\int_S \frac{dS}{R_1 R_2}.$$

Or

$$\varphi - \psi = \widehat{\mathbf{X}, \mathbf{T}} + \widehat{\mathbf{T}, \xi} = \widehat{\mathbf{X}, \xi}.$$

Donc $\varphi - \psi$ exprime précisément la rotation finie éprouvée par le trièdre, soumis à la liaison, après un tour effectué par son sommet sur C. Cette rotation est précisément mesurée par l'angle

$$\int\int \frac{dS}{R_1 R_2}.$$

Nous ne développerons pas davantage la théorie du trièdre mobile. Les indications précédentes nous suffiront amplement pour relier au point de vue métrique externe certaines notions de la théorie des surfaces, qui seront présentées par la suite d'une manière autonome, c'est-à-dire rattachées à la considération exclusive de l'élément linéaire. C'est ce point de vue qui nous occupera maintenant d'une manière prédominante.

209. Géométrie d'une surface. Théorie du déplacement parallèle. — Lorsque nous avons développé la théorie des surfaces, nous nous sommes placés au point de vue métrique externe, c'est-à-dire que nous avons raisonné sur une surface plongée dans un espace euclidien à trois dimensions. Cependant, au cours de cette étude, nous avons remarqué qu'il existe des propriétés liées d'une manière exclusive à l'élément linéaire, ce sont les propriétés géodésiques (n° 126). Parmi les notions fondamentales entre lesquelles s'exercent ces propriétés, nous avons rencontré les suivantes :

1° la longueur d'une courbe tracée sur la surface;

2° l'aire d'une portion de cette surface;

3° l'angle de deux courbes en un point de la surface;

4° la courbure géodésique d'une ligne de la surface en chaque point;

5° la courbure totale de la surface en chaque point.

Mais le plus souvent, les démonstrations que nous avons utilisées ont emprunté des éléments à l'espace euclidien où la surface est plongée. Est-il possible d'éliminer ces éléments, qui peuvent sembler, à juste titre, étrangers à la question, ou, si l'on préfère, de constituer une géométrie autonome de la surface? Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi.

Dans ce but, nous aurons à suivre une marche parallèle à celle qui, dans la première partie de ces leçons, nous a permis d'isoler la géométrie linéaire et d'en donner une construction logique. Nous avons encore à poser des concepts fondamentaux et à édicter une réglementation par postulats : les propositions que nous avons en vue découleront ensuite de ces prémisses par voie purement déductive.

Nous emprunterons encore les idées essentielles de cette construction à M. H. Weyl, qui les a magistralement exposées dans son volume *Espace, temps, matière* (1). Il est bien entendu que nous nous plaçons exclusivement dans le domaine abstrait, que nous séparons chaque notion géométrique de la figuration que notre esprit est tenté d'y lier, sous l'influence de notre conception visuelle de la géométrie ordinaire. Voici alors une esquisse de la construction annoncée.

210. Premier groupe de concepts et de postulats : *le continu étudié, ses points, ses vecteurs.* — Appelons *point* tout système de valeurs λ et μ. Puisqu'il faut, par définition, deux nombres pour fixer un point, nous dirons que l'ensemble

(1) Chap. II, voir principalement les § 11, 13 et suivants. Tout récemment, M. E. Cartan a apporté aux conceptions de M. H. Weyl d'importants compléments dans des notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de février à juillet 1922. Voir le développement de ces notes dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1923, 1924 et dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 1924.

de tous les points (l'*espace*) est un *continu à deux dimensions*. Les nombres λ, μ, qui permettent de déterminer la position d'un point, s'appellent les *coordonnées* de ce point.

On peut concevoir une infinité de systèmes de coordonnées. On passe d'un premier système à un autre, absolument quelconque, en posant

$$(352) \qquad \lambda_1 = f(\lambda, \mu), \qquad \mu_1 = g(\lambda, \mu),$$

f et g étant deux fonctions qui, au moins pour toutes les valeurs utiles de λ, μ, seront supposées admettre des dérivées continues du premier ordre, donnant naissance à un déterminant fonctionnel $\frac{D(f, g)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \mu_1}{\partial \mu} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mu}\frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda}$ non nul. Dans ces conditions, les équations

$$(353) \qquad d\lambda_1 = f'_\lambda d\lambda + f'_\mu d\mu, \qquad d\mu_1 = g'_\lambda d\lambda + g'_\mu d\mu,$$

permettront de tirer $d\lambda$ et $d\mu$ en fonction de $d\lambda_1$ et de $d\mu_1$.

Pour interpréter ces équations, considérons le point M de notre continu qui, dans le premier système, a pour coordonnées λ et μ ; le point M′, qui, dans ce même système, a pour coordonnées $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$. Posant un nouveau concept fondamental, nous dirons que chaque couple de points infiniment voisins détermine un *vecteur infinitésimal*. Nous représenterons ce vecteur par dM. Nous énoncerons en outre le postulat suivant :

Deux vecteurs dM *particuliers, tels que* d'M *et* d''M, *et deux scalaires particuliers, tels que* α' *et* α'', *déterminent univoquement un vecteur, qu'on représente par la notation* $\alpha' d'\text{M} + \alpha'' d''\text{M}$, *et qui satisfait aux conditions suivantes : si* d'M *correspond aux accroissements infinitésimaux* $d'\lambda$, $d'\mu$, *et si* d''M *correspond aux accroissements infinitésimaux* $d''\lambda$, $d''\mu$, *le vecteur précédent correspond aux accroissements* $\alpha' d'\lambda + \alpha'' d''\lambda$ *et* $\alpha' d'\mu + \alpha'' d''\mu$.

Les équations (353) peuvent alors être interprétées comme il suit :

Le mode de composition linéaire entre vecteurs infinitésimaux, qui vient d'être envisagé, *a un sens indépendant du système de coordonnées adopté.*

Nous venons de définir la multiplication d'un vecteur infiniment petit dM par un scalaire α. Une généralisation bien naturelle nous amène alors à poser le concept de *vecteur fini* en un point de la multiplicité. Supposons que λ et μ soient fonctions d'un paramètre t : à chaque valeur de t correspond une position du point M. Quand t subit un accroissement infinitésimal dt, le point M subit un déplacement qui correspond au vecteur infinitésimal dM. Nous conviendrons alors que chaque vecteur dM détermine une *direction* au point M, et que $\frac{d\text{M}}{dt}$ est un *vecteur fini*, lié au point M, et possédant cette direction.

Moyennant cela, nous pouvons attribuer un sens précis aux locutions suivantes : *les vecteurs* $\frac{\partial \text{M}}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \text{M}}{\partial \mu}$. Si λ seul prend l'accroissement infinitésimal $d\lambda$, le point M se

déplacera d'un vecteur infinitésimal $d'M = \frac{\partial M}{\partial \lambda} d\lambda$. Si μ seul prend l'accroissement infinitésimal $d\mu$, le point M se déplacera d'un vecteur infinitésimal $d''M = \frac{\partial M}{\partial \mu} d\mu$.

D'après ce que nous avons dit sur la composition des vecteurs infinitésimaux, lorsque λ et μ prendront simultanément les accroissements $d\lambda$ et $d\mu$, le point M se déplacera d'un vecteur infinitésimal

$$dM = d'M + d''M = \frac{\partial M}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial M}{\partial \mu} d\mu.$$

Par ce premier groupe de concepts et de postulats, nous posons en principe que la géométrie linéaire est localement valable. Si l'on adopte un certain système de coordonnées λ, μ, on pourra prendre comme vecteurs fondamentaux en un point M les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu}$. Les quantités $d\lambda$, $d\mu$ seront alors les composantes contrevariantes du vecteur infinitésimal dM (1).

Grâce aux définitions précédentes, nous pouvons maintenant concevoir, sur la multiplicité étudiée :

1° un champ scalaire (ou fonction de point) défini d'une manière indépendante du système de coordonnées adopté ;

2° un champ vectoriel, doué du même caractère.

Si l'on a recours à un système particulier de coordonnées, un champ scalaire s'exprimera au moyen d'une fonction de λ, μ donnant la valeur du champ en chaque point ; un champ vectoriel sera déterminé si l'on donne en chaque point ses composantes contrevariantes.

211. Second groupe de concepts et de postulats : *le déplacement parallèle.* — Nous venons de définir les vecteurs d'une surface en un point, ainsi que la composition linéaire de ces vecteurs. Mais cette étude exclusive, faite en un point, est insuffisante pour construire la géométrie de la surface. Pour analyser les propriétés infinitésimales de celle-ci, il y a lieu de préciser les relations qu'on peut établir entre l'ensemble des vecteurs de la surface en un point M et l'ensemble de ses vecteurs en un autre point M'. Nous supposerons à cet effet que les points M et M' sont infiniment voisins. Concevons une *correspondance linéaire* entre l'ensemble des vecteurs en M et l'ensemble des vecteurs en M', *qui se réduise à la transformation identique* lorsque M' vient se confondre avec M. Elle sera définie par des équations de la forme

$$(354) \qquad \begin{cases} dh = (l\,d\lambda + m\,d\mu)h + (p\,d\lambda + q\,d\mu)k, \\ dk = (l'\,d\lambda + m'\,d\mu)h + (p'\,d\lambda + q'\,d\mu)k, \end{cases}$$

(1) Il est à peine nécessaire de faire remarquer que les notions qui jouent, dans la construction abstraite exposée ci-dessus, le rôle des concepts primordiaux, se sont présentées naturellement dans l'étude que nous avons faite d'une surface, supposée plongée dans l'espace ordinaire : ainsi, la notion de vecteur fini, en un point M d'une surface, n'est pas différente au fond de celle de vecteur tangent, en géométrie classique.

en appelant h, k les composantes contrevariantes d'un vecteur en M [le système fondamental étant formé des vecteurs $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mu}$], $h + dh$, $k + dk$ celles d'un vecteur en M′ [le système fondamental étant déterminé en ce point suivant la même loi qu'en M].

Si hardi que cela puisse paraître, en remarquant seulement que cela n'implique aucune incompatibilité logique avec ce qui précède, nous dirons que la transformation précédente est un *déplacement parallèle*, si au point M intéressé, il est possible d'annuler les huit fonctions l, m, p, q, l', m', p', q' par un choix convenable de la représentation paramétrique. Nous allons établir la condition nécessaire et suffisante pour que cette annulation puisse s'obtenir : elle consiste dans la symétrie des deux expressions dh et dk [qui sont des formes bilinéaires en $d\lambda$ et $d\mu$ d'une part, h et k d'autre part] par rapport aux deux vecteurs $(d\lambda, d\mu)$ et (h, k), symétrie qui se traduit par

$$m = p, \qquad m' = p'.$$

En effet, prenons un nouveau mode de représentation paramétrique et posons

$$\lambda = \varphi(\lambda_1, \mu_1), \qquad \mu = \psi(\lambda_1, \mu_1).$$

Nous aurons les formules de transformation suivantes :

$$(355)\qquad \begin{cases} d\lambda = \dfrac{\partial \lambda}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mu_1} d\mu_1, \\ d\mu = \dfrac{\partial \mu}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \dfrac{\partial \mu}{\partial \mu_1} d\mu_1; \end{cases}$$

$$(356)\qquad \begin{cases} h = \dfrac{\partial \lambda}{\partial \lambda_1} h_1 + \dfrac{\partial \lambda}{\partial \mu_1} k_1, \\ k = \dfrac{\partial \mu}{\partial \lambda_1} h_1 + \dfrac{\partial \mu}{\partial \mu_1} k_1. \end{cases}$$

Nous voulons qu'avec cette nouvelle représentation, on ait, pour le point M,

$$dh_1 = 0, \qquad dk_1 = 0.$$

Or, en différentiant dans cette hypothèse les formules (356), on obtient

$$(357)\qquad \begin{cases} dh = \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \lambda_1^2} h_1 d\lambda_1 + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \lambda_1 \partial \mu_1}(h_1 d\mu_1 + k_1 d\lambda_1) + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \mu_1^2} k_1 d\mu_1, \\ dk = \dfrac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda_1^2} h_1 d\lambda_1 + \dfrac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda_1 \partial \mu_1}(h_1 d\mu_1 + k_1 d\lambda_1) + \dfrac{\partial^2 \mu}{\partial \mu_1^2} k_1 d\mu_1. \end{cases}$$

Ces formules doivent être identiques à celles qu'on déduit des formules initiales (354), lorsqu'on y remplace $d\lambda$ et $d\mu$, h et k, par leurs valeurs respectives (355) et (356). Sans pousser le calcul, on peut remarquer que les seconds membres des relations (357) sont bien des fonctions symétriques des deux vecteurs indiqués dans l'énoncé précédent. La condition est donc nécessaire.

Elle est suffisante, car si elle est remplie, on peut toujours trouver deux fonctions $\varphi(\lambda_1, \mu_1)$, $\psi(\lambda_1, \mu_1)$ telles qu'on ait, *au point* M,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \mu_1} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_1^2} = l, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_1 \partial \mu_1} = m = p, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_1^2} = q,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_1^2} = l', \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_1 \partial \mu_1} = m' = p', \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu_1^2} = q';$$

dès lors on peut passer des formules (354) aux formules (357), il en résulte bien que l'on a $dh_1 = dk_1 = 0$.

En résumé, ayant adopté sur la multiplicité étudiée un certain mode de représentation paramétrique, nous y définirons le déplacement parallèle infinitésimal par des formules du type

$$(358) \qquad \begin{cases} dh = lhd\lambda + p(hd\mu + kd\lambda) + qkd\mu, \\ dk = l'hd\lambda + p'(hd\mu + kd\lambda) + q'kd\mu, \end{cases}$$

en désignant par l, p, q, l', p', q' six fonctions bien déterminées de λ, μ. Nous les appellerons en abrégé les *six caractéristiques d'un déplacement parallèle infinitésimal*. Si l'on n'impose d'autre condition, ces six fonctions sont entièrement arbitraires. Il en est tout autrement lorsqu'on fait appel à des concepts métriques. Avant de passer à cet ordre d'idées, remarquons qu'un déplacement parallèle fini s'obtient en intégrant, le long d'une courbe de la multiplicité, un déplacement parallèle infinitésimal. En l'absence de conditions spéciales imposées aux fonctions l, p, q, l', p', q', le résultat d'un déplacement parallèle fini, depuis une position initiale M jusqu'à une position finale N, dépendra essentiellement du chemin qui sera suivi pour aller du premier de ces points au second. Ce résultat sera en effet fourni par l'intégration des équations (358) qui forment un système aux différentielles totales; ce système ne peut être complètement intégrable qu'à titre exceptionnel. Nous indiquerons plus loin une application concrète de cette idée.

212. Troisième groupe de concepts et de postulats. — On peut introduire une première notion : celle du *rapport des longueurs de deux vecteurs infinitésimaux* liés à un même point M de la multiplicité. Soient les vecteurs ayant pour composantes contrevariantes $d\lambda$, $d\mu$ pour l'un, $\delta\lambda$, $\delta\mu$ pour l'autre. Nous admettrons que la géométrie euclidienne est valable localement : d'après ce que nous avons vu (II), cette hypothèse est équivalente à la suivante :

Le rapport de la longueur du vecteur $(d\lambda, d\mu)$ à celle du vecteur $(\delta\lambda, \delta\mu)$ est une forme quadratique du premier vecteur définie et positive, qui se réduit à l'unité lorsqu'on fait simultanément

$$d\lambda = \delta\lambda, \qquad d\mu = \delta\mu;$$

ce rapport a donc une expression de la forme

$$\frac{Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda\, d\mu + Gd\mu^2}{E\delta\lambda^2 + 2F\delta\lambda\,\delta\mu + G\delta\mu^2}.$$

On est ainsi conduit à faire jouer, dans la géométrie de la surface, un rôle essentiel à une forme quadratique, définie et positive, dans l'expression de laquelle subsiste un facteur positif arbitraire ρ, soit

$$\rho(Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda\, d\mu + Gd\mu^2).$$

Par définition, cette forme exprime le carré de la longueur d'un vecteur infinitésimal, lié à M, et ayant pour composantes contrevariantes $d\lambda$, $d\mu$. Le carré de la longueur d'un vecteur fini, de composantes contrevariantes h, k et de même origine, serait pareillement

(359) $$\mathfrak{L} = \rho(Eh^2 + 2Fhk + Gk^2).$$

Bien entendu, le coefficient ρ est déterminé par le choix en M de l'étalon de longueur.

Pour aller plus loin, il reste à coordonner la mesure des longueurs en deux points distincts M et M'. Supposons que ces points soient infiniment voisins. Comment devons-nous formuler la définition de cette nouvelle notion : *égalité d'un vecteur en* M *et d'un vecteur en* M'?

On peut adopter ici deux attitudes bien différentes :

1° On peut postuler que *l'étalon de longueur est susceptible d'être transporté d'un point à l'autre de la surface, sans qu'il en résulte d'altération pour cet étalon.* Dans ces conditions, la locution : *choisir le même étalon en tous les points* a un sens bien défini. On est amené à définir le carré de la longueur d'un vecteur infinitésimal par la formule

(360) $$dM^2 = Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda\, d\mu + Gd\mu^2.$$

C'est le point de vue de Riemann, qui nous occupera le plus souvent.

2° On peut au contraire postuler (cela n'implique aucune contradiction logique) qu'en transportant l'étalon d'un circuit fermé, la longueur de celui-ci s'est modifiée lorsqu'on retombe au point de départ. La locution *choisir le même étalon en tous les points* cesse alors d'avoir un sens, puisque le transport de l'étalon d'un point particulier à un point quelconque dépend essentiellement du chemin suivi pour atteindre ce second point. Il faut donc supposer qu'on a établi, aux divers points de la multiplicité, un étalonnage suivant une loi arbitraire, que nous astreindrons seulement à des conditions de continuité et de dérivabilité. Cet étalonnage une fois choisi, la valeur de ρ en chaque point sera bien déterminée, et en changeant seulement la signification de E, F, G, on pourra encore faire $\rho = 1$.

Il faut maintenant définir ce que nous appellerons *déplacement infinitésimal* de M en M'. Soit $\mathfrak{L}$ le nombre qui mesure le carré de la longueur d'un vecteur en M. Pour définir un vecteur égal en M', il suffit de fixer la valeur $\mathfrak{L} + d\mathfrak{L}$ du nombre qui mesure le carré de la longueur de ce vecteur : $d\mathfrak{L}$ n'est pas nul en général, parce que l'étalon en M' diffère (infiniment peu) de l'étalon en M. Nous remarquerons que le

rapport $\frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}$ doit être le même pour tous les vecteurs liés à M. Donc, pour définir l'égalité d'un vecteur en M et d'un vecteur en M', nous serons amenés à poser

$$\frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}} = \Phi(\lambda, \mu, d\lambda, d\mu),$$

Φ étant une fonction donnée, homogène et du premier degré, des deux différentielles $d\lambda$, $d\mu$. Nous particulariserons la forme de cette fonction en faisant appel à ce nouveau postulat :

On peut toujours choisir l'étalonnage de manière à annuler la fonction Φ *au point* M (et en ce point seulement) *quels que soient* $d\lambda$, $d\mu$, et ainsi pour chaque point M.

Si l'on change l'étalonnage, $\mathfrak{L}$ se change en $\alpha\mathfrak{L}_1$, α désignant une fonction positive du point M. Nous aurons

$$\frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}} = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_1}.$$

On peut, d'après le postulat précédent, choisir la fonction α de manière que l'on ait $d\mathfrak{L}_1 = 0$, pour le point M. Pour les valeurs des paramètres λ, μ qui caractérisent le point M, nous aurons donc

$$\Phi(\lambda, \mu, d\lambda, d\mu) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial\alpha}{\partial\mu}d\mu\right).$$

Et ainsi pour chaque point M. L'expression Φ devra donc être linéaire en $d\lambda$ et $d\mu$ (puisqu'elle possède cette propriété pour chaque système particulier de valeurs λ, μ). Nous serons donc conduits à poser en définitive

$$\frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}} = \varphi(\lambda, \mu)d\lambda + \psi(\lambda, \mu)d\mu, \tag{361}$$

φ et ψ désignant deux fonctions données de λ et de μ. Inversement, une telle expression de $\frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}$ est toujours compatible avec le postulat précédent, car pour chaque système particulier de valeurs λ, μ, on peut toujours trouver une fonction α du point M dont la différentielle logarithmique se réduise au second membre de (361).

En général, ce second membre n'est pas une différentielle totale : supposons cependant qu'à titre exceptionnel cette circonstance se présente. Quels que soient λ, μ, ce second membre pourra être mis sous la forme $\frac{d\alpha}{\alpha}$. En changeant l'étalonnage de manière à avoir

$$\mathfrak{L} = \alpha\mathfrak{L}_1,$$

l'égalité de deux vecteurs en M et M' s'exprimera par

$$d\mathfrak{L}_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{L}_1 = \text{const.}$$

On retombe donc sur le cas où il est possible de choisir le même étalon en tous les points. Autrement dit, on retrouve le point de vue de Riemann.

En résumé, le premier des points de vue précédents est un cas particulier du second. Celui-ci a fourni à M. Weyl la base d'une géométrie nouvelle, où toutes les relations métriques sont rattachées à deux formes différentielles, à savoir la forme quadratique

$$E d\lambda^2 + 2F d\lambda d\mu + G d\mu^2,$$

et la forme linéaire

$$\varphi d\lambda + \psi d\mu,$$

qui donne la valeur de $\frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}$.

213. Détermination des six fonctions caractéristiques par les postulats métriques. — M. Weyl a mis en lumière un résultat d'une importance capitale :

Dans sa géométrie, comme dans celle de Riemann, les six fonctions caractéristiques sont complètement déterminées, grâce aux conditions métriques.

En effet, les six fonctions dont il s'agit ont pour but de définir un déplacement parallèle infinitésimal. A partir de l'instant où l'on a fait intervenir des notions métriques, il devient naturel de soumettre cette transformation à la condition suivante : elle conserve les longueurs. En exprimant la condition impliquée par ce nouveau postulat, on trouve sans difficulté les six fonctions caractéristiques cherchées.

Soit un vecteur de composantes contrevariantes h, k. Après un déplacement parallèle infinitésimal, de M en M', ses composantes sont devenues $h + dh$, $k + dk$, dh et dk étant donnés par les formules

$$(362) \quad \begin{cases} dh = (lh + pk) d\lambda + (ph + qk) d\mu, \\ dk = (l'h + p'k) d\lambda + (p'h + q'k) d\mu. \end{cases}$$

D'autre part, le nombre $\mathfrak{L}$ qui mesure le carré de la longueur du vecteur (h, k) est donné par

$$(363) \quad \mathfrak{L} = Eh^2 + 2Fhk + Gk^2$$

et, après le déplacement parallèle, sa longueur est restée la même. Donc le nombre qui mesure le carré de sa longueur est $\mathfrak{L} + d\mathfrak{L}$, l'accroissement $d\mathfrak{L}$ satisfaisant à la condition

$$(364) \quad \frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}} = \varphi d\lambda + \psi d\mu.$$

Or, nous pouvons obtenir une autre expression de $\frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}$ en différentiant l'équation (363) et en remplaçant dans le résultat obtenu dh et dk par leurs valeurs (362) : $\frac{d\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}}$ se présentera ainsi comme une forme linéaire en $d\lambda$, $d\mu$, dont les coefficients seront respectivement

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial \lambda} h^2 + 2\frac{\partial F}{\partial \lambda} hk + \frac{\partial G}{\partial \lambda} k^2 + 2(Eh + Fk)(lh + pk) + 2(Fh + Gk)(l'h + p'k)}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2},$$

et

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial \mu} h^2 + 2\frac{\partial F}{\partial \mu} hk + \frac{\partial G}{\partial \mu} k^2 + 2(Eh + Fk)(ph + qk) + 2(Fh + Gk)(p'h + q'k)}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2};$$

quels que soient h et k, ces coefficients devront égaler respectivement φ et ψ. Chacune de ces identifications nous fournira trois équations, qui seront du premier degré par rapport aux six fonctions caractéristiques. Le système total des six équations ainsi obtenues détermine en définitive ces six fonctions.

214. Dans ce qui va suivre, nous nous placerons uniquement au point de vue de Riemann. Nous supposerons donc que l'on a

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0. \tag{365}$$

Nos six équations seront alors les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \lambda} + El + Fl' = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda} + Fl + Ep + Gl' + Fp' = 0,\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \lambda} + Fp + Gp' = 0,\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \mu} + Ep + Fp' = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \mu} + Fp + Eq + Gp' + Fq' = 0,\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \mu} + Fq + Gq' = 0.
\end{aligned}\right. \tag{366}$$

On peut leur substituer un système équivalent

$$\left\{\begin{aligned}
El + Fl' &= -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \lambda},\\
Fl + Gl' &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \lambda},\\
Ep + Fp' &= -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \mu},\\
Fp + Gp' &= -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \lambda},\\
Eq + Fq' &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu},\\
Fq + Gq' &= -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \mu},
\end{aligned}\right. \tag{367}$$

d'où l'on tire immédiatement les valeurs de l, l', p, p', q, q' : les deux premières équations donnent en effet l, l', les deux suivantes p, p', les deux dernières q, q'. Le calcul de résolution s'effectue régulièrement pour chacun de ces systèmes partiels, car pour chacun d'eux le déterminant des coefficients est la quantité positive $EG - F^2$. Il n'est d'ailleurs pas utile d'opérer cette résolution. Multiplions respectivement les équations (362) par E et F et ajoutons. Il vient, en vertu des relations précédentes,

$$E\,dh + F\,dk = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \lambda} h\,d\lambda - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \mu}(k\,d\lambda + h\,d\mu) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \lambda} - \frac{\partial F}{\partial \mu}\right) k\,d\mu. \tag{368}$$

En multipliant de même les équations (362) par F et G et ajoutant, il vient

$$(369) \qquad F dh + G dk = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right) h d\lambda - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \lambda}(k d\lambda + h d\mu) - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \mu} k d\mu.$$

Le problème du déplacement parallèle est donc entièrement résolu sur une multiplicité à deux dimensions, lorsqu'on adopte le point de vue de Riemann. Tablant sur ce résultat, nous pourrions retrouver les propriétés géodésiques les plus importantes que nous avons rencontrées dans la théorie des surfaces.

Il est à la fois plus rapide et plus instructif de montrer comment on peut lier mutuellement le point de vue qui précède et le point de vue métrique externe, afin de profiter des résultats acquis dans cet ordre d'idées.

215. Interprétation du déplacement parallèle en géométrie ordinaire. — Nous venons d'étudier, d'une manière indépendante, la géométrie d'une surface dont on donne l'élément linéaire

$$E d\lambda^2 + 2F d\lambda\, d\mu + G d\mu^2.$$

Tout au moins avons-nous précisé pour cette surface le sens de l'opération : *déplacement parallèle infinitésimal.* Or, au n° 125, nous avons reconnu qu'on peut tracer, dans un espace euclidien à trois dimensions, une infinité de surfaces admettant l'élément linéaire précédent. Cherchons ce que sera, à ce point de vue, un déplacement parallèle. Il nous faut recourir aux formules (368) et (369), qui définissent cette transformation, ainsi qu'aux relations qui existent entre les coefficients E, F, G de l'élément linéaire et les dérivées géométriques successives $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \mu}$,... M désignant un point de l'espace euclidien tridimensionnel astreint à décrire l'une des surfaces admettant l'élément linéaire donné. Or les relations (127) nous permettent d'écrire les formules (368) et (369) sous la forme

$$E dh + F dk + \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} h d\lambda + \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu}(k d\lambda + h d\mu) + \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} k d\mu = 0,$$

$$F dh + G dk + \frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} h d\lambda + \frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu}(k d\lambda + h d\mu) + \frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2} k d\mu = 0,$$

ou encore

$$E dh + F dk + \frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\left[h d\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right) + k d\left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)\right] = 0,$$

$$F dh + G dk + \frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot\left[h d\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right) + k d\left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right)\right] = 0,$$

ou, en tenant compte de la signification de E, F, G,

$$d(Eh + Fk) = h\frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot d\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right) + k\frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot d\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\right),$$

$$d(Fh + Gk) = h\frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot d\left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right) + k\frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot d\left(\frac{\partial M}{\partial \mu}\right);$$

les premiers membres sont précisément les différentielles des composantes covariantes du vecteur **V**, vecteur qui peut s'écrire

$$\mathbf{V} = h\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} + k\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mu}.$$

On peut donc mettre les deux relations précédentes sous la forme

$$\begin{cases} d\left(\mathbf{V}.\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda}\right) = \mathbf{V}.d\left(\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda}\right), \\ d\left(\mathbf{V}.\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mu}\right) = \mathbf{V}.d\left(\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mu}\right); \end{cases}$$

on en déduit les relations équivalentes

$$(370) \qquad \begin{cases} d\mathbf{V}.\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = 0, \\ d\mathbf{V}.\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mu} = 0, \end{cases}$$

dont l'ensemble exprime le fait suivant :

En géométrie ordinaire, *pour qu'un vecteur qui demeure tangent à une surface subisse un déplacement parallèle, il faut et il suffit que sa dérivée géométrique soit normale à la surface.*

Cet énoncé peut être transformé de la manière suivante : traçons dans le plan tangent en M une figure invariablement liée au vecteur **V** (dont la longueur est constante par hypothèse), supposons par exemple que cette figure soit constituée par le vecteur **MV** lui-même et par un vecteur **MW** de longueur invariable, l'angle de MV et de MW étant égal à un droit. Appelons toujours ν le vecteur unité de la normale en M. La figure MV, MW, Mν est un trièdre trirectangle : par hypothèse la différence géométrique entre la vitesse du point V et la vitesse du point M (dérivée géométrique de **MV**) est colinéaire au vecteur ν. Or cette différence géométrique est égale au produit vectoriel $\Omega \wedge$ **MV**, en désignant par Ω la rotation instantanée du trièdre précédent. Donc Ω doit être perpendiculaire à ν, et réciproquement, s'il en est ainsi, la dérivée géométrique de **MV** sera bien portée par la normale en M : le vecteur **MV** et tous les vecteurs d'origine M qui lui sont invariablement liés dans le plan tangent subiront donc bien un *déplacement parallèle* [1].

En résumé, la liaison à laquelle il faut astreindre un trièdre trirectangle dont le sommet décrit une surface, dont la troisième arête reste normale à cette surface, pour que les deux premières arêtes de ce trièdre subissent un déplacement parallèle n'est autre que la liaison non holonome que nous avons citée dans le paragraphe 5° du n° 207.

216. Définition autonome de la courbure géodésique et de la courbure

(1) Il est bien entendu que cette locution possède ici un sens bien différent de celle qu'on lui donne dans les éléments de la géométrie ordinaire. Si dans une rédaction la nécessité d'une distinction s'imposait, on pourrait adopter, en se plaçant au point de vue précédent, la terminologie : *déplacement parallèle relatif*.

totale. — Les remarques précédentes nous dispensent de reprendre entièrement les développements qui seraient nécessaires pour exposer, en utilisant uniquement l'élément linéaire, la théorie de la courbure géodésique et de la courbure totale.

Conservons le point de vue de Riemann, et considérons, en chaque point M d'une courbe C qui appartient à la multiplicité étudiée, le vecteur unité **MT** de la tangente à cette courbe. Soit $\mathbf{M_0T_0}$ celui qui correspond à une position particulière M_0. Imprimons à un vecteur de la surface, au sens du n° 214, un déplacement parallèle à partir de la position initiale $\mathbf{M_0T_0}$, en astreignant son origine M à décrire la courbe C. Soit **MS** une position de ce vecteur; en général **MS** ne coïncide pas avec **MT**, l'angle SMT est une fonction α de l'abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{M_0M}$. La courbure géodésique en M n'est autre que la quantité $\frac{d\alpha}{ds}$; dans une construction autonome, ce serait là sa définition même. Mais il est essentiel de montrer qu'elle concorde avec la définition donnée au point de vue métrique externe. Il suffit à cet effet de se reporter au paragraphe 2° du n° 207. Le vecteur unité Γ de la normale géodésique à C est un vecteur de la multiplicité. Si nous plongeons cette multiplicité dans un espace ordinaire, et si ν y représente le vecteur normal en M, le trièdre MS, MΔ, Mν (MΔ désigne la perpendiculaire à MS dans le plan tangent) possédera une rotation instantanée située dans le plan MSΔ, puisque MS subit un déplacement parallèle. Donc, pour le trièdre MT, MΓ, Mν, la composante suivant Mν de la rotation instantanée sera $\frac{d\alpha}{ds}$. Or, d'après la formule (347), obtenue au 2e paragraphe du n° 207, cette composante est aussi égale à la courbure géodésique.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer au n° 211, le déplacement parallèle d'un vecteur ne présente pas en général les caractères de l'intégrabilité complète : en transportant un vecteur parallèlement à lui-même et en faisant décrire à l'origine de ce vecteur un circuit fermé, la position finale occupée par le vecteur diffère en général de sa position initiale. Nous avons obtenu d'ailleurs au n° 208 le résultat suivant :

Si deux arêtes d'un trièdre trirectangle demeurent tangentes à la multiplicité (supposée plongée dans un espace ordinaire) et subissent un déplacement parallèle, après un tour effectué sur C par le sommet M de ce trièdre, l'angle de la rotation finie (autour de la normale), qui ramènerait la position initiale du trièdre en coïncidence avec sa position finale, est

$$\iint \frac{dS}{R_1R_2}.$$

Cette rotation étant susceptible d'une définition autonome, on aura là un moyen de définir, indépendamment du point de vue métrique externe, la courbure totale de la multiplicité, ou, comme on dit aussi, la courbure attachée à la forme quadratique

$$E d\lambda^2 + 2F d\lambda d\mu + G d\mu^2.$$

Après avoir établi la possibilité d'instituer une géométrie autonome des multiplicités à deux dimensions, géométrie dont on conçoit immédiatement la généralisation à

des multiplicités à un nombre quelconque de dimensions, nous allons étendre aux multiplicités de Riemann à deux dimensions les points les plus essentiels de la théorie des champs scalaires et des champs vectoriels.

217. Champs scalaires et champs vectoriels. — Dans ce qui va suivre, on pourra adopter indifféremment deux points de vue, soit qu'on envisage les vecteurs d'une multiplicité de Riemann à deux dimensions, définie par son élément linéaire, soit qu'on considère une surface de l'espace ordinaire admettant cet élément linéaire et qu'on raisonne sur des vecteurs tangents à cette surface. Grâce aux explications que nous avons données, il n'y aura désormais entre ces points de vue qu'une différence de mots. Il suffira d'une théorie unique, dont les résultats se formuleront dans un langage conforme à l'ordre d'idées que l'on aura adopté.

Nous avons déjà indiqué les méthodes employées pour fixer, en un point d'une surface définie paramétriquement, un vecteur du plan tangent : on détermine ce vecteur, ou bien par ses composantes contrevariantes h, k en posant

$$\mathbf{V} = h\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k\frac{\partial M}{\partial \mu},$$

ou bien par ses composantes covariantes σ et τ, définies par

$$(371) \qquad \sigma = \mathbf{V}.\frac{\partial M}{\partial \lambda}, \qquad \tau = \mathbf{V}.\frac{\partial M}{\partial \mu}.$$

On passe des unes aux autres par les relations

$$(372) \qquad \begin{cases} \sigma = Eh + Fk, \\ \tau = Fh + Gk. \end{cases}$$

Cela posé, considérons d'abord sur une surface S, un certain champ scalaire, ou, si l'on préfère, une fonction de point φ (M). La notion de dérivée d'une telle fonction suivant une direction tangente à la surface S se généralise immédiatement et il n'y a pas besoin d'insister.

Considérons les dérivées de φ (M) dans toutes les directions tangentes en M à S (ou, si l'on adopte l'autre point de vue, dans toutes les directions de la multiplicité au point M). Toutes ces dérivées dépendent encore d'un vecteur unique, que nous continuerons à appeler le *gradient* de la fonction φ au point M.

Pour définir ce vecteur, faisons d'abord remarquer qu'on peut exprimer le produit scalaire de deux vecteurs tangents à S en un même point à l'aide de l'élément linéaire et des composantes contrevariantes de ces vecteurs. Soient **V** et $\mathbf{V}_1$ deux vecteurs tangents à S et liés à un même point M. Appelons respectivement h, k et h_1, k_1 leurs composantes contrevariantes. Nous aurons respectivement

$$(373) \qquad \mathbf{V} = h\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k\frac{\partial M}{\partial \mu},$$

$$(374) \qquad \mathbf{V}_1 = h_1\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k_1\frac{\partial M}{\partial \mu},$$

d'où, en faisant le produit scalaire,

$$\mathbf{V}.\mathbf{V}_1 = \mathrm{E}hh_1 + \mathrm{F}(hk_1 + kh_1) + \mathrm{G}kk_1.$$

Le produit scalaire joue toujours le rôle de forme polaire de la forme quadratique fondamentale (comparer n° 72). Mais on peut simplifier son expression en introduisant les composantes covariantes de l'un des vecteurs : soient toujours σ, τ celles du vecteur $\mathbf{V}$, définies par les relations (371).

Portons ces expressions dans celle de $\mathbf{V}.\mathbf{V}_1$, obtenue en prenant pour $\mathbf{V}_1$ la valeur (374). Il vient

$$(375) \qquad \mathbf{V}.\mathbf{V}_1 = h_1\mathbf{V}.\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda} + k_1\mathbf{V}.\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mu} = h_1\sigma + k_1\tau.$$

En appelant pareillement σ_1 et τ_1 les composantes covariantes de $\mathbf{V}_1$, on trouverait aussi

$$(376) \qquad \mathbf{V}.\mathbf{V}_1 = h\sigma_1 + k\tau_1.$$

Ces points établis, revenons à l'étude du champ scalaire φ (M). Les valeurs des dérivées de cette fonction en un point M de S, suivant les directions tangentes à S, se déduisent de sa différentielle première. Supposons qu'on ait adopté un certain mode de représentation paramétrique de S. Alors φ (M) aura une certaine expression $\varphi(\lambda,\mu)$. Sa différentielle s'écrira

$$(377) \qquad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}d\mu.$$

Or, nous reconnaissons, au second membre, le produit scalaire de deux vecteurs :

1° le vecteur de composantes contrevariantes $d\lambda$, $d\mu$, autrement dit le déplacement infinitésimal dM du point M;

2° le vecteur de composantes covariantes $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$. C'est ce vecteur que nous appellerons le *gradient* de la fonction φ, et cette définition conservera l'égalité fondamentale

$$(378) \qquad d\varphi = \mathbf{grad}\,\varphi . d\mathrm{M}.$$

Examinons maintenant les conséquences de cette définition. Soit $\mathbf{U}$ un vecteur unité, lié à M, et tangent à S. Cherchons la dérivée de φ dans la direction de ce vecteur. Cette dérivée est la limite du rapport $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$, en appelant $\Delta\varphi$ l'accroissement obtenu en accomplissant un petit déplacement de longueur Δl dans cette direction. Sa valeur est donc $\frac{d\varphi}{dl}$. Or, le déplacement précédent s'exprime vectoriellement sous la forme

$$d\mathrm{M} = \mathbf{U}dl.$$

On a donc, d'après la relation (378),

$$\frac{d\varphi}{dl} = \mathbf{grad}\,\varphi . \mathbf{U}.$$

On tire de cette formule les mêmes déductions que celles que nous avons rencontrées dans l'étude des champs scalaires de l'espace ordinaire. La direction de **grad** φ en chaque point M est la direction suivant laquelle il convient de se déplacer pour que $\frac{d\varphi}{dl}$ soit, en valeur absolue, le plus grand possible : son sens est le sens des φ croissants, autrement dit la direction et le sens du gradient correspondent à la rapidité de croissance maximum de φ.

En chaque point de la surface S, il passe, si φ est une fonction uniforme, une ligne $\varphi =$ const. Le long de cette ligne, on a $d\varphi = 0$; il en résulte que la normale géodésique en chaque point de cette ligne est colinéaire à **grad** φ.

218. Dans l'espace ordinaire, nous avons déduit d'une fonction de point $\Phi(M)$, une autre fonction de point $\Delta_1\Phi$, à l'aide d'un opérateur Δ_1, de sens invariant, obtenu en prenant le carré du gradient spatial de Φ. Sur une surface S nous pourrons, par un processus analogue, déduire d'une fonction φ (M) d'un point de cette surface, une nouvelle fonction $\Delta_1\varphi$, par le jeu d'un nouvel opérateur Δ_1, défini par la relation

$$\Delta_1\varphi = \mathbf{grad}^2\varphi. \tag{379}$$

Il est facile d'expliciter Δ_1 lorsque S est définie par son élément linéaire, exprimé dans un certain mode de représentation paramétrique. Soit

$$dM^2 = E d\lambda^2 + 2F d\lambda\, d\mu + G d\mu^2.$$

Les composantes covariantes de **grad** φ sont respectivement $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$. Ses composantes contrevariantes sont donc les nombres h et k, définis par le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} &= Eh + Fk, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} &= Fh + Gk, \end{aligned}\right. \tag{380}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} h &= \frac{1}{EG - F^2}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - F\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right), \\ k &= \frac{1}{EG - F^2}\left(-F\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + E\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right). \end{aligned}\right. \tag{381}$$

Nous aurons dès lors

$$\Delta_1\varphi = \mathbf{grad}^2\varphi = h\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + k\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \frac{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2}{EG - F^2}. \tag{382}$$

C'est Beltrami qui a considéré pour la première fois l'expression ci-dessus et lui a donné le nom de *paramètre différentiel du premier ordre.*

Si l'on pose $\psi = f(\varphi)$, en désignant par f une fonction de la seule variable φ, le système des courbes $\varphi =$ const. et celui des courbes $\psi =$ const. ne diffèrent pas dans leur ensemble. De la formule précédente, on déduit aisément

$$\Delta_1\psi = \Delta_1\varphi\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 \tag{383}$$

Il en résulte que si une famille de courbes C, de la surface S, est définie par $\varphi =$ const., où φ satisfait à une équation du type

(384) $$\Delta_1\varphi = \mathcal{F}(\varphi),$$

$\mathcal{F}$ désignant une fonction de φ, on pourra, à l'équation $\varphi =$ const. qui définit le système de ces courbes, substituer une nouvelle équation

$$\psi = \text{const.},$$

la fonction ψ étant assujettie à vérifier l'équation

(385) $$\Delta_1\psi = 1.$$

Nous allons généraliser le résultat obtenu au n° 147 en démontrant le théorème suivant :

Soit sur la surface S *une famille de lignes* $\psi =$ const., ψ *étant soumise à l'équation*

$$\Delta_1\psi = 1.$$

Les trajectoires orthogonales de ces lignes sont des géodésiques.

En effet, adoptons comme coordonnées curvilignes d'un point M de la surface :

1° le paramètre ψ de la ligne $\psi =$ const. qui passe en ce point;

2° le paramètre ω, tel que chaque courbe $\omega =$ const. soit une trajectoire orthogonale des lignes $\psi =$ const.

Nous aurons un élément linéaire de la forme

$$\mathrm{E}d\psi^2 + \mathrm{G}d\omega^2.$$

Il s'ensuivra que l'on pourra écrire, d'après l'expression (382) de l'opérateur Δ_1,

$$\Delta_1\psi = \frac{1}{\mathrm{E}},$$

d'où, en comparant à l'hypothèse $\Delta_1\psi = 1$,

$$\mathrm{E} = 1.$$

Notre élément linéaire se réduira donc à $d\psi^2 + \mathrm{G}d\omega^2$. Mais alors, d'après ce que nous avons vu au n° 200, les lignes $\omega =$ const. forment bien une famille à un paramètre de lignes géodésiques [1].

[1] La démonstration ci-dessus convient pour établir le théorème du n° 147, relatif à l'espace ordinaire. Considérons les surfaces $\omega =$ const., où ω est une fonction telle que $\mathbf{grad}^2\,\omega = 1$. Pour définir un point de l'espace, utilisons le paramètre de la surface $\omega =$ const. qui passe en ce point, et deux autres coordonnées λ, μ telles que les courbes $\lambda =$ const., $\mu =$ const., soient orthogonales aux surfaces $\omega =$ const. Nous pourrons écrire

$$d\mathrm{M}^2 = \mathrm{E}d\lambda^2 + 2\mathrm{F}d\lambda\,d\mu + \mathrm{G}d\mu^2 + \mathrm{K}d\omega^2.$$

Le gradient de ω est défini par la relation

$$d\omega = \mathbf{grad}\,\omega . d\mathrm{M};$$

si on laisse λ et μ constants, $d\mathrm{M}$ se réduit à $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \omega}d\omega$, et ce vecteur est colinéaire à $\mathbf{grad}\,\omega$,

219. Supposons maintenant qu'on considère simultanément deux fonctions de point $\varphi(M)$ et $\psi(M)$ sur la surface S. Nous apercevons immédiatement le moyen d'en déduire, par une opération invariante, une nouvelle fonction : il suffit de considérer le produit scalaire $\mathbf{grad}\,\varphi.\mathbf{grad}\,\psi$. Dans la théorie des paramètres différentiels, on l'écrit $\Delta(\varphi, \psi)$. On a ainsi

$$(386)\quad \Delta(\varphi, \psi) = \mathbf{grad}\,\varphi.\mathbf{grad}\,\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - F\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}}{EG - F^2} + \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} - F\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}}{EG - F^2}$$

$$= \frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\mu} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right) + E\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}}{EG - F^2}.$$

Le paramètre différentiel $\Delta_1\varphi$ était une forme quadratique en $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$: le paramètre mixte $\Delta(\varphi, \psi)$ en est la forme polaire.

220. Donnons maintenant les notions les plus indispensables concernant les champs de vecteurs tangents à une surface S. Désignons encore ici le vecteur du champ en M par $\mathbf{V}$ (M). A chaque déplacement infinitésimal dM du point d'application correspond, dans l'espace euclidien qui baigne la surface S, un accroissement géométrique $d\mathbf{V}$ du vecteur du champ; ce dernier est la somme géométrique de deux vecteurs infinitésimaux, l'un normal $d_n\mathbf{V}$, l'autre tangentiel $d_t\mathbf{V}$. Soit donc M' le nouveau point d'application, à la suite du déplacement dM. Le vecteur du champ en M' aux infiniment petits d'ordre supérieur près, s'écrira

$$\mathbf{V} + d_n\mathbf{V} + d_t\mathbf{V}.$$

Le vecteur $\mathbf{V} + d_n\mathbf{V}$, d'origine M', se déduit du vecteur $\mathbf{V}$ d'origine M par déplacement parallèle. Donc le vecteur tangentiel infinitésimal $d_t\mathbf{V}$ représente la différence géométrique entre le vecteur du champ en M' et le vecteur de même origine déduit du vecteur du champ en M par déplacement parallèle. Entre les vecteurs dM d'une part, et $d_t\mathbf{V}$ d'autre part, il existe une *correspondance linéaire*. Pour la mettre en évidence, désignons toujours par h et k les composantes contrevariantes de $\mathbf{V}$. Nous aurons

$$\mathbf{V} = h\frac{\partial M}{\partial\lambda} + k\frac{\partial M}{\partial\mu},$$

nous en déduirons

$$d\mathbf{V} = \frac{\partial M}{\partial\lambda}dh + \frac{\partial M}{\partial\mu}dk + hd\lambda\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda^2} + (hd\mu + kd\lambda)\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\partial\mu} + kd\mu\frac{\partial^2 M}{\partial\mu^2};$$

et par suite, en nous reportant encore une fois aux relations (127),

$$(387)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial\lambda}.d\mathbf{V} &= Edh + Fdk + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\lambda}hd\lambda + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\mu}(hd\mu + kd\lambda) + \left(\frac{\partial F}{\partial\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda}\right)kd\mu, \\ \frac{\partial M}{\partial\mu}.d\mathbf{V} &= Fdh + Gdk + \left(\frac{\partial F}{\partial\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\mu}\right)hd\lambda + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\lambda}(hd\mu + kd\lambda) + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\mu}kd\mu. \end{aligned}\right.$$

en vertu de l'orthogonalité des lignes $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ aux surfaces $\omega = \text{const.}$ Il en résulte aisément que $K = \left(\frac{\partial M}{\partial\omega}\right)^2 = 1$. Par suite, les lignes $\lambda = \mu = \text{const.}$ sont des géodésiques, c'est-à-dire des droites.

Dans les premiers membres figurent deux produits scalaires qui sont précisément les composantes covariantes du vecteur tangentiel $d_t\mathbf{V}$. Si nous remarquons maintenant que h et k sont des fonctions données de λ et μ, nous apercevons que les seconds membres des relations précédentes sont des fonctions linéaires de $d\lambda$ et de $d\mu$, c'est-à-dire des composantes contrevariantes du vecteur dM. Le théorème est donc établi.

221. L'étude des éléments infinitésimaux du premier ordre d'un champ de vecteurs tangents à la surface S en un point se ramène donc à celle de la transformation linéaire précédente. En général, cette transformation linéaire ne sera pas une transformation autométrique, mais on pourra déterminer une fonction w (M) telle que la correspondance linéaire entre les vecteurs

$$d\mathrm{M} \qquad \text{et} \qquad d_t\mathbf{V} - \frac{w}{2} d\mathrm{M} \wedge \nu$$

soit une transformation autométrique. Le vecteur $w\,\nu$, normal à S en M, s'appelle encore le rotationnel du champ. Calculons w : à cet effet, nous remarquerons qu'au déplacement infinitésimal δM correspondrait, dans la transformation autométrique cherchée, le vecteur

$$\delta_t\mathbf{V} - \frac{w}{2}\delta\mathrm{M} \wedge \nu.$$

Par définition des transformations autométriques, nous devrons avoir la relation

$$(388) \qquad d\mathrm{M}.\left(\delta\,\mathbf{V} - \frac{w}{2}\delta\mathrm{M} \wedge \nu\right) = \delta\mathrm{M}.\left(d_t\mathbf{V} - \frac{w}{2} d\mathrm{M} \wedge \nu\right),$$

ou encore

$$(389) \qquad d\mathrm{M}.\delta_t\mathbf{V} - \delta\mathrm{M}.d_t\mathbf{V} = w\, aire(d\mathrm{M}.\,\delta\mathrm{M}),$$

en désignant en abrégé par *aire* (dM, δM) celle du parallélogramme construit sur ces vecteurs infinitésimaux. Pour calculer w, on peut remarquer qu'il est indifférent d'écrire $d\mathrm{M}.\delta_t\mathbf{V}$ ou $d\mathrm{M}\,.\delta\mathbf{V}$. Dans ces conditions, servons-nous des expressions

$$d\mathrm{M} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\mu}d\mu, \qquad \delta\mathrm{M} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\mu}\delta\mu,$$

$$d\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial\mu}d\mu, \qquad \delta\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial\mu}\delta\mu.$$

$$d\mathrm{M}.\delta\mathrm{M} \wedge \nu = d\mathrm{M} \wedge \delta\mathrm{M}.\nu = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\lambda} \wedge \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\mu}(d\lambda\delta\mu - d\mu\delta\lambda).\nu.$$

Elles permettent de transformer la relation (388). En divisant les deux membres par $d\lambda\delta\mu - \delta\lambda d\mu$, il vient

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\lambda}.\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial\mu} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\mu}.\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial\lambda} = w\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\lambda} \wedge \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\mu}.\nu,$$

en remarquant que les vecteurs $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\mu}$ ont pour longueurs respectives $\sqrt{\mathrm{E}}$ et $\sqrt{\mathrm{G}}$ et que leur angle est défini par $\cos^2\theta = \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{EG}}$, il vient donc

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\lambda} \wedge \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial\mu}.\nu = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2},$$

d'où finalement

$$w = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial M}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mu} - \frac{\partial M}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} - \frac{\partial \tau}{\partial \lambda}\right],$$

où σ et τ représentent toujours les composantes covariantes de $\mathbf{V}(M)$. Ainsi, d'un champ vectoriel tangent à la surface S, on déduit sur cette surface un champ scalaire invariant par la formule

$$(390) \qquad w = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} - \frac{\partial \tau}{\partial \lambda}\right).$$

222. On peut aussi, dans la théorie des champs vectoriels tangents à une surface S, se placer au point de vue de la théorie des transformations infinitésimales, en faisant correspondre à tout champ $\mathbf{V}$ (M) la transformation qui fait passer d'un point M au point infiniment voisin M′ défini par

$$\mathbf{MM'} = \mathbf{V}(M)\,dt.$$

Les vecteurs du champ sont alors les vecteurs vitesse des molécules d'un fluide continu, répandu sur la surface S. Pour avoir un problème réel s'approchant de cette conception, on pourra supposer qu'un fluide est répandu continûment dans l'espace compris entre la surface S et une surface parallèle infiniment voisine. Cherchons, comme au n° 158, le jacobien de cette transformation infinitésimale : à un point M, de coordonnées curvilignes λ, μ, elle fait correspondre un point M′ de coordonnées $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, où $d\lambda$ et $d\mu$ sont les composantes contrevariantes du vecteur $\mathbf{V}dt$. Or, si à chaque point M de S on faisait correspondre, dans une transformation finie, un point M_1 de la même surface, en posant [1]

$$\lambda_1 = \varphi(\lambda, \mu),$$
$$\mu_1 = \psi(\lambda, \mu),$$

il serait facile de calculer la limite du rapport d'une aire infiniment petite en englobant M_1 à l'aire infiniment petite correspondante englobant le point M (aires empruntées à S). En effet, désignons ces aires par Σ_{M_1} et Σ_M. Dans le plan des λ, μ leur correspondent des aires σ_1 et σ. On a

$$\frac{\Sigma_{M_1}}{\sigma_1} = \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}, \qquad \frac{\Sigma_M}{\sigma} = \sqrt{EG - F^2}.$$

D'où la valeur du jacobien cherché, dans le cas d'une transformation finie,

$$\frac{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}}{\sqrt{EG - F^2}}\;\frac{D(\lambda_1, \mu_1)}{D(\lambda, \mu)}.$$

(1) Pour passer du cas de la transformation finie à la transformation infinitésimale, il faut poser

$$\lambda_1 = \lambda + h\,dt,$$
$$\mu_1 = \mu + k\,dt,$$

h et k désignant toujours les composantes covariantes de $\mathbf{V}$.

Or, dans le cas de la transformation infinitésimale étudiée, nous avons

$$\frac{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}}{\sqrt{EG - F^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{EdG + GdE - 2FdF}{EG - F^2},$$

$$\frac{D(\lambda_1, \mu_1)}{D(\lambda, \mu)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial h}{\partial \lambda}dt & \frac{\partial h}{\partial \mu}dt \\ \frac{\partial k}{\partial \lambda}dt & 1 + \frac{\partial k}{\partial \mu}dt \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial \lambda} + \frac{\partial k}{\partial \mu}\right)dt.$$

En multipliant membre à membre ces deux relations, nous trouvons ici que la dilatation superficielle est le produit par dt de la quantité

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} + \frac{\partial k}{\partial \mu} + \frac{1}{2}\frac{\left(E\frac{\partial G}{\partial \lambda} + G\frac{\partial E}{\partial \lambda} - 2F\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)h + \left(E\frac{\partial G}{\partial \mu} + G\frac{\partial E}{\partial \mu} - 2F\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)k}{EG - F^2},$$

laquelle s'écrit encore

(391) $$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}(h\sqrt{EG - F^2}) + \frac{\partial}{\partial \mu}(k\sqrt{EG - F^2})\right].$$

Nous représenterons encore cette expression par la notation div. **V**.

223. Découpons sur la surface S une aire $\mathcal{A}$, délimitée par un contour c. Par flux du vecteur **V** à travers le contour c, il faut entendre ici l'intégrale

$$\int_c \mathbf{V}.\Gamma\, ds,$$

en désignant par ds l'élément d'arc de c, et par Γ le vecteur unité de la normale géodésique en un point de ce contour, dirigé vers l'extérieur de l'aire qu'il délimite. Supposons un fluide répandu sur la surface S, et considérons la portion de ce fluide intérieure à l'instant t à l'aire $\mathcal{A}$. A l'instant $t + dt$, l'accroissement $d\mathcal{A}$ de l'aire recouverte par cette portion du fluide peut s'exprimer indifféremment par l'intégrale curviligne

$$dt\int_c \mathbf{V}.\Gamma\, ds,$$

ou par l'intégrale double

$$dt\int\int_{\mathcal{A}} \text{div.}\mathbf{V}\, dS.$$

D'où un nouveau théorème établissant entre le flux et la divergence sur la surface la relation

(392) $$\int\int_{\mathcal{A}} \text{div.}\mathbf{V}\, dS = \int_c \mathbf{V}.\Gamma\, ds,$$

dont la forme est la même que celle de la relation analogue pour les champs de l'espace ordinaire.

Nous avons signalé précédemment le rôle capital de la transformation linéaire qui permet de passer du vecteur infinitésimal dM à la composante tangentielle de l'accrois-

sement correspondant du vecteur du champ, soit $d_t \mathbf{V}$. Cette transformation synthétise les éléments infinitésimaux du premier ordre du champ étudié, au point M. Pour qu'à titre exceptionnel, elle soit constamment autométrique, il faut et il suffit que la fonction scalaire w, définie par la relation (390), soit identiquement nulle, ou encore que les composantes covariantes σ,τ de $\mathbf{V}$ obéissent à la condition

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} = \frac{\partial \tau}{\partial \lambda},$$

laquelle équivaut à l'existence d'une fonction $\varphi(\lambda,\mu)$ telle qu'on ait respectivement

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}, \qquad \tau = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}.$$

Le champ $\mathbf{V}$ (M) est alors défini par

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\,\varphi.$$

Calculons la divergence d'un tel champ.

Ses composantes contrevariantes h et k sont définies par les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \mathrm{E}h + \mathrm{F}k,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \mathrm{F}h + \mathrm{G}k,$$

en tenant compte de l'expression (391) de div. $\mathbf{V}$, nous aurons donc

$$(393) \quad \text{div.}\,\mathbf{grad}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \mathrm{F}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \mathrm{F}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\right)\right].$$

C'est encore Beltrami qui a introduit cette formation invariante, qu'on appelle *paramètre différentiel du second ordre*, et qu'on représente par la même notation $\Delta_2\varphi$ que le laplacien, qui en est un cas particulier. Si nous posons pour abréger l'écriture

$$(394) \qquad \mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2},$$

nous aurons en définitive

$$(395) \qquad \Delta_2\varphi = \frac{1}{\mathrm{H}}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right)\right].$$

Cette expression se réduira au laplacien si la surface S est un plan (ou si elle admet l'élément linéaire du plan). Si λ,μ représentent des coordonnées rectangulaires, l'élément linéaire se réduit à $d\lambda^2 + d\mu^2$, et on trouve bien

$$(396) \qquad \Delta_2\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}.$$

Mais il importe de remarquer qu'on peut choisir dans un plan des coordonnées curvilignes absolument quelconques; la formule (395) résout donc le problème suivant :

exprimer le laplacien à deux dimensions lorsqu'on rapporte le plan à un système arbitraire de coordonnées curvilignes.

224. Revenons à une surface S quelconque, et appliquons le théorème flux-divergence, en choisissant pour élément d'intégrale superficielle l'expression

$$\text{(397)} \qquad \operatorname{div}(\mathrm{U}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{V}) = \mathrm{U}\Delta_2\mathrm{V} + \mathbf{grad}\,\mathrm{U}.\mathbf{grad}\,\mathrm{V} = \mathrm{U}\Delta_2\mathrm{V} + \Delta(\mathrm{U}, \mathrm{V}),$$

où U et V sont deux fonctions scalaires. Il vient, en désignant par $\frac{d}{dn}$ une dérivée prise suivant la normale géodésique intérieure à l'aire $\mathcal{A}$,

$$\text{(398)} \qquad \iint_{\mathcal{A}} [\mathrm{U}\Delta_2\mathrm{V} + \Delta(\mathrm{U}, \mathrm{V})]\,d\mathrm{S} + \int_{\mathrm{C}} \mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dn}ds = 0;$$

en échangeant U et V, on ne change pas Δ (U, V) et on obtient

$$\text{(399)} \qquad \iint_{\mathcal{A}} [\mathrm{V}\Delta_2\mathrm{U} + \Delta(\mathrm{U}, \mathrm{V})]\,d\mathrm{S} + \int_{\mathrm{C}} \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dn}ds = 0;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\text{(400)} \qquad \iint_{\mathcal{A}} (\mathrm{U}\Delta_2\mathrm{V} - \mathrm{V}\Delta_2\mathrm{U})\,d\mathrm{S} + \int_{\mathrm{C}} \left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dn} - \mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dn}\right) ds = 0.$$

Cette formule constitue la généralisation immédiate de celle de Green [formule 317] que nous avons signalée au n° 194.

Son application exige que les fonctions U, V soient continues dans l'aire $\mathcal{A}$, et possèdent dans cette aire des dérivées continues des deux premiers ordres. On doit supposer en outre l'existence d'une dérivée normale continue sur le contour C.

225. Relations entre les opérateurs différentiels d'une surface et ceux d'un espace euclidien qui la baigne. — Posons-nous maintenant la question suivante :

Supposons qu'une surface S soit plongée dans l'espace ordinaire, où l'on considère un champ scalaire ou un champ vectoriel. A ce champ, on peut en rattacher d'autres définis sur la surface S. Comment les opérateurs invariants relatifs à ces champs envisagés sur S sont-ils liés aux opérateurs concernant le champ spatial primitif?

Soit d'abord, dans l'espace qui baigne la surface S, un champ scalaire Φ (M), Lorsque le point M est sur la surface S, la fonction Φ (M) se réduit à une fonction φ (M) constituant sur S un nouveau champ scalaire. Montrons que le gradient de φ (M) sur la surface S est la composante tangentielle du gradient de Φ (M) dans l'espace. En effet, désignons par $\mathbf{g}$ le gradient de φ, par $\mathbf{G}$ celui de Φ, par $\mathbf{G}_t$ la composante tangentielle de $\mathbf{G}$. D'après les définitions, nous avons, pour tout déplacement infinitésimal de M sur S,

$$d\Phi = \mathbf{G}.d\mathrm{M} = (\mathbf{G}_t + \mathbf{G}_n).d\mathrm{M} = \mathbf{G}_t.d\mathrm{M},$$

et

$$d\varphi = \mathbf{g}.d\mathrm{M}.$$

Or sur S, on a $d\varphi = d\Phi$. Il résulte alors de la comparaison des égalités précédentes

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}_t.$$

Envisageons maintenant, dans l'espace extérieur, un champ vectoriel $\mathbf{V}(M)$. En chaque point d'une surface S, le vecteur $\mathbf{V}(M)$ est la somme géométrique d'une composante tangentielle $\mathbf{v}(M)$ et d'une composante normale, qu'on peut représenter sous la forme

$$\varphi(M)\nu,$$

$\varphi(M)$ désignant un champ scalaire défini sur la surface S. Comment sont liées les opérations invariantes sur le champ spatial $\mathbf{V}(M)$ aux opérations analogues concernant les deux champs superficiels $\varphi(M)$ et $\mathbf{v}(M)$?

De l'égalité de définition

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{v}(M) + \nu\varphi(M), \tag{401}$$

où M est supposé appartenir à la surface S, on peut déduire par différentiation la loi de la correspondance linéaire $(dM, d_t\mathbf{v})$, spéciale au plan tangent en M, de celle de la correspondance générale $(dM, d\mathbf{V})$: lorsque dM est dans le plan tangent en M, $d\mathbf{V}$ par le jeu de cette dernière correspondance appartient à un plan Π, transformé du plan tangent. Si donc on différentie géométriquement les deux membrea de (401), et si on réduit les résultats obtenus à leurs composantes tangentielles, on obtient

$$d_t\mathbf{v} = d_t\mathbf{V} - \varphi\, d\nu \tag{402}$$

en désignant par $d_t\mathbf{V}$ la projection orthogonale sur le plan tangent du vecteur $d\mathbf{V}$ (du plan Π) transformé de dM.

Non seulement la direction $d\nu$ appartient au plan tangent en M, mais encore la correspondance linéaire $(dM, \varphi\, d\nu)$ est autométrique. Donc, *pour que la correspondance* $(dM, d_t\mathbf{V})$ *soit autométrique,* il faut et il suffit qu'il en soit de même de la correspondance $(dM, d\mathbf{v})$, ou encore que l'on ait pour tous les couples de vecteurs infinitésimaux dM, δM du plan tangent

$$dM \,.\, \delta_t\mathbf{V} = \delta M \,.\, d_t\mathbf{V},$$

relation équivalente à

$$dM \,.\, \delta\mathbf{V} = \delta M \,.\, d\mathbf{V}. \tag{403}$$

Reportons-nous à l'égalité (217) qui fournit une définition du rotationnel. D'après cette égalité, pour que la relation (403) soit satisfaite, *il faut et il suffit que le rotationnel* (spatial) *de* $\mathbf{V}$ *soit situé dans le plan tangent en* M.

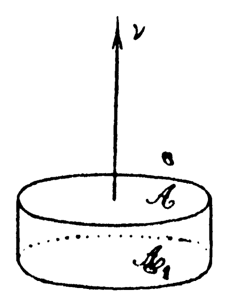
226. Dans ce même ordre d'idées, l'application du théorème flux-divergence et du théorème circulation-rotationnel fournit la démonstration rapide de certains résultats.

Soit par exemple à exprimer la divergence spatiale du champ $\mathbf{V}$, en un point de la surface S, au moyen de la divergence superficielle du champ $\mathbf{v}$ et d'autres opérateurs invariants. Traçons une surface S_1, parallèle à la surface S et infiniment voi-

sine et appliquons le théorème flux-divergence à la portion de l'espace délimitée d'une part à l'aide de S et de S_1, et de l'autre par un tube de normales communes. Soit C le contour directeur de ce tube sur la surface S, et $\mathcal{A}$ l'aire qu'il délimite sur S. Appelons ε la distance constante de S et de S_1. Nous aurons

$$\varepsilon \int\int_{\mathcal{A}} \text{div. spat. } \mathbf{V}\, dS = \varepsilon \int_C \mathbf{V}.\Gamma\, ds + \int\int_{\mathcal{A}} \mathbf{V}.\nu\, dS - \int\int_{\mathcal{A}_1} \mathbf{V}_1.\nu\, dS_1,$$

en appelant Γ le vecteur unité de la normale géodésique au contour C (vers l'extérieur), $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}_1$ les deux valeurs du vecteur du champ en deux points où le vecteur normal est ν, pour S comme pour S_1, dS et dS_1 des éléments d'aire constituant les sections par S et par S_1 d'un même tube de normales. D'après ce que nous avons vu au n° 204, nous avons d'ailleurs



$$dS - dS_1 = -\varepsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS = -\varepsilon k\, dS,$$

en désignant par k la courbure moyenne. D'autre part, on peut écrire

$$\mathbf{V}.\nu - \mathbf{V}_1.\nu = \varepsilon \frac{d\varphi}{dn},$$

en désignant ici par le symbole $\frac{d}{dn}$ une dérivée prise dans la direction et dans le sens de ν, à la condition, le long de chaque surface de notre système parallèle, de désigner toujours par φ la composante normale de $\mathbf{V}$. Nous obtenons ainsi, après division par ε, et après avoir remarqué l'égalité de $\mathbf{V}.\Gamma$ et de $\mathbf{v}.\Gamma$,

$$\int\int_{\mathcal{A}} \text{div. spat. } \mathbf{V}\, dS = \int_C \mathbf{v}.\Gamma\, ds + \int\int_{\mathcal{A}} \left(\frac{d\varphi}{dn} - k\varphi\right) dS;$$

dans le second membre, l'intégrale curviligne se laisse transformer par le théorème flux-divergence que nous avons établi dans cette section pour la surface S. En remarquant que le résultat précédent a lieu, quel que soit le contour C, on voit que l'on a nécessairement

$$\text{(404)} \qquad \text{div. spat. } \mathbf{V} = \text{div. superf. } \mathbf{v} + \frac{d\varphi}{dn} - k\varphi.$$

C'est la relation cherchée. En particulier, appliquons-la au cas où l'on aurait

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\, \Psi,$$

ce que nous écrirons pour plus de clarté

$$\text{(405)} \qquad \mathbf{V} = \mathbf{grad.spat.}\, \Psi.$$

Nous avons vu que, sur la surface S, la composante tangentielle de $\mathbf{V}$ est précisément

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad.superf.}\, \Psi.$$

Dès lors, entre le laplacien $\Delta\Psi$ et le beltramien $\Delta_2\Psi$ pour la surface S, nous obtenons la relation

$$\Delta\Psi = \Delta_2\Psi + \frac{d^2\Psi}{dn^2} - k\frac{d\Psi}{dn}\text{(1)}. \tag{406}$$

227. Voici maintenant une application de la formule de Stokes. Considérons toujours un contour C, tracé sur la surface S, et délimitant une aire $\mathcal{A}$. Nous avons

$$\int_C \mathbf{V}.d\mathrm{M} = \int\int_{\mathcal{A}} \mathrm{rot}\,\mathbf{V}.\nu dS.$$

Or, puisque dM est un vecteur infinitésimal de S, nous avons

$$\mathbf{V}.d\mathrm{M} = \mathbf{v}.d\mathrm{M}.$$

On a donc, quel que soit le contour C,

$$\int_C \mathbf{v}.d\mathrm{M} = \int\int_{\mathcal{A}} \mathrm{rot}\,\mathbf{V}.\nu dS, \tag{407}$$

égalité qui montre que la composante normale du rotationnel (spatial) dépend uniquement de la composante tangentielle du champ **V**. En particulier, *si en tous les points de la surface* S, *le champ est normal à cette surface, le rotationnel en chacun de ces points sera tangent à* S.

En outre, la relation (407) permet de calculer, d'une manière générale, la composante normale du rotationnel. Soient σ et τ les composantes covariantes du vecteur v, $d\lambda$, $d\mu$ les composantes contrevariantes du vecteur dM, nous avons

$$\mathbf{v}.d\mathrm{M} = \sigma d\lambda + \tau d\mu.$$

Transformons l'intégrale de cette quantité, le long du contour C, par la formule de Green. Il vient

$$\int_C \sigma d\lambda + \tau d\mu = -\int\int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\mu} - \frac{\partial\tau}{\partial\lambda}\right) d\lambda\, d\mu = -\int\int_{\mathcal{A}} w dS, \tag{408}$$

w étant le champ scalaire invariant que nous avons défini par la formule (390). Il en résulte que la composante normale du rotationnel du champ **V**, en un point de la surface S, est précisément égale à $-w$.

228. **Applications**. — 1° Soit l'équation aux différentielles totales

$$\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = 0, \tag{409}$$

qu'on peut encore écrire

$$\mathbf{V}.d\mathrm{M} = 0,$$

en désignant par **V** le vecteur dont les composantes sont les fonctions P, Q, R des coordonnées x, y, z de son point d'application. Pour qu'une surface S vérifie cette équation, il faut et il suffit que le champ lui soit normal en tous ses points, ou encore

(1) Cf. Hadamard, *Propagation des ondes*, chap. I.

que le rotationnel de ce champ soit partout tangent à S. On retrouve ainsi la condition d'intégrabilité

$$\text{(410)} \qquad \mathbf{V}.\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = 0.$$

Vérifiée pour une surface isolée, cette condition n'entraîne pas la communauté de direction de **V** et de la normale en chaque point. Au contraire, si elle est vérifiée dans tout l'espace, il existe une famille de surfaces orthogonales au champ en chaque point : nous nous contenterons d'indiquer ce fait en renvoyant, pour sa démonstration, aux cours d'analyse (1).

2° Considérons l'équation de Laplace

$$\text{(411)} \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0.$$

A l'aide de la formule (404), on la transforme aisément, soit en coordonnées cylindriques, soit en coordonnées sphériques. Nous supposerons que le vecteur ν, normal au cylindre ou à la sphère, qui passe au point considéré, est extérieur à cette surface,

(1) Lorsque l'équation (409) n'est pas complètement intégrable, on peut la considérer comme définissant les lignes qui, en chacun de leurs points, sont normales au vecteur correspondant du champ **V**. On dit que ces lignes sont les *trajectoires orthogonales* du champ **V**. On peut remarquer qu'elles satisfont à la condition $\mathbf{V}.\frac{d\mathrm{M}}{ds} = 0$; on obtient en dérivant

$$\mathbf{V}.\frac{d^2\mathrm{M}}{ds^2} + \frac{d\mathrm{M}}{ds}.\frac{d\mathbf{V}}{ds} = 0,$$

ou, en désignant par **T**, **N** les vecteurs unitaires de la tangente et de la normale principale, par ρ la courbure,

$$\rho\,\mathbf{V}.\mathbf{N} + \mathbf{T}.\frac{d\mathbf{V}}{ds} = 0.$$

On obtient ainsi des résultats analogues à ceux de la théorie des surfaces : la courbure est bien déterminée si l'on donne en un point la tangente et le plan osculateur d'une trajectoire orthogonale. On voit en outre que lorsque ce plan tourne autour de la tangente supposée fixe, la projection du rayon de courbure $\mathrm{M}\omega$ sur le vecteur du champ au point M reste fixe. Le lieu du point ω est donc un cercle (généralisation du théorème de Meusnier). On peut donc appliquer au cas actuel la notion de *courbure normale* et particulariser parmi les trajectoires orthogonales C celles qui sont *asymptotiques*, c'est-à-dire le long desquelles la courbure normale est nulle. Dans des recherches de ce genre, on pourra toujours remarquer que l'on peut toujours supposer $\mathbf{V}^2 = 1$, puisque seule la direction du champ intervient : moyennant cette hypothèse, on peut reprendre tous les calculs et tous les raisonnements du n° 131 en substituant partout au vecteur ν le vecteur **V**. La formule, identique à (147), à laquelle on sera ainsi conduit, fournira encore deux expressions remarquables communes aux trajectoires orthogonales tangentes en M à une même droite. L'une est la courbure normale, déjà citée. L'autre est égale à $\tau - \frac{d\theta}{ds}$: les lignes C sur lesquelles elle s'annule généralisent les *lignes de courbure*. Remarquons d'ailleurs que pour deux déplacements quelconques d et δ orthogonaux à **V**, nous aurons

$$\delta\mathbf{V}.d\mathrm{M} = \delta(\mathbf{V}.d\mathrm{M}) - \mathbf{V}.\delta d\mathrm{M} = -\mathbf{V}.\delta d\mathrm{M} = -\mathbf{V}d\delta\mathrm{M} = d\mathbf{V}.\delta\mathrm{M}.$$

Il en résulte que la correspondance entre dM et d**V** (qui s'exerce en vertu de $\mathbf{V}^2 = 1$, dans le plan perpendiculaire à **V**) est autométrique. On en déduit les mêmes résultats qu'en théorie des surfaces : formule de Bonnet, tangence des lignes de courbure aux directions principales de la correspondance précédente, etc.

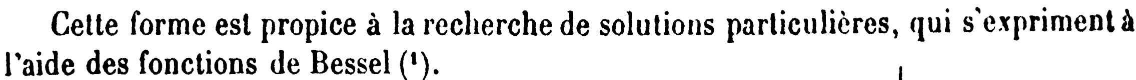
De la sorte $\frac{d}{dn}$, dans un cas comme dans l'autre, se réduira à une dérivée prise par rapport à r, longueur du rayon vecteur.

Dans le cas des coordonnées cylindriques, l'expression de la courbure moyenne est $-\frac{1}{r}$. D'autre part, le cylindre étant une surface à courbure totale nulle, le beltramien s'y réduit au laplacien, et son expression prend la forme

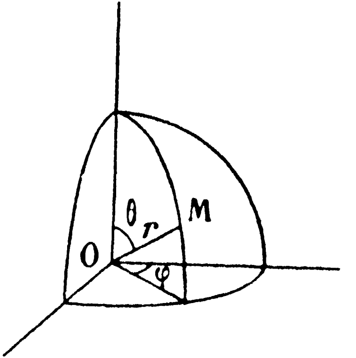
$$\Delta_2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}.$$

L'équation de Laplace s'écrira donc, en coordonnées cylindriques,

$$(412) \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = 0.$$



Cette forme est propice à la recherche de solutions particulières, qui s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel (¹).



Dans le cas des coordonnées sphériques, la courbure moyenne est égale à $-\frac{2}{r}$. Convenons de déterminer un point M de l'espace par son rayon vecteur r et par la trace m de la demi-droite OM sur la sphère de rayon un. Une fonction du point M se réduit alors à une fonction dépendant du point m de cette sphère et du paramètre r. Désignons par δ_2 l'opérateur de Beltrami sur la sphère de rayon un. L'opérateur analogue Δ_2 sur la sphère de rayon r lui est lié par la formule

$$\Delta_2 = \frac{1}{r^2}\delta_2.$$

Par suite, l'équation de Laplace prend la forme

$$(413) \qquad \frac{\delta_2\Psi}{r^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0,$$

où $\delta_2\Psi$, déduit par la formule (395) de l'élément linéaire $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$, a pour valeur

$$(414) \qquad \delta_2\Psi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}.$$

Cette transformation de l'équation de Laplace est le point de départ de la théorie

(1) Voir sur ce point l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 5, fasc. 2, nᵒˢ 32 et suivants. Le lecteur pourra amorcer lui-même la question en cherchant les solutions $F(r)G(z)\Phi(\theta)$.

des fonctions sphériques pour laquelle nous renvoyons le lecteur aux ouvrages classiques (1).

229. Transformations conformes. — Une manière simple d'établir une correspondance point à point entre deux surfaces S et S′ consiste à associer les points M et M′ qui proviennent d'un même couple de valeurs λ, μ des paramètres. Dans l'étude des surfaces, faite au point de vue métrique externe, nous avons rencontré un exemple remarquable de correspondance point par point entre deux surfaces : c'est la représentation sphérique. D'ailleurs, cette transformation n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale, celle qui consiste à établir sur S et S′ une correspondance entre les points où les plans tangents sont parallèles.

Supposons que S et S′ soient seulement données par leurs éléments linéaires

$$E\,d\lambda^2 + 2F\,d\lambda\,d\mu + G\,d\mu^2,$$
$$E'd\lambda^2 + 2F'd\lambda\,d\mu + G'd\mu^2,$$

étant entendu que les points qui se correspondent proviennent d'un même couple de valeurs λ, μ. Parmi les transformations les plus remarquables qu'on puisse ainsi obtenir, nous signalerons celles qui conservent les angles. Sur la surface S, la formule qui donne le cosinus de l'angle des vecteurs dM et δM n'est autre que

$$\cos(dM,\,\delta M) = \frac{Ed\lambda\delta\lambda + F(d\lambda\delta\mu + d\mu\delta\lambda) + Gd\mu\delta\mu}{\sqrt{(Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda d\mu + Gd\mu^2)(E\delta\lambda^2 + 2F\delta\lambda\delta\mu + G\delta\mu^2)}}.$$

Le second membre reste inaltéré lorsqu'on change simultanément E, F, G, en ρE, ρF, ρG. Donc, la transformation conservera certainement les angles si l'on a

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G}.$$

Ces conditions sont du reste nécessaires, comme on le voit aisément en remarquant que la conservation des angles exige la similitude des figures infiniment petites, formées de points correspondants infiniment voisins de M et de M′, et par suite, la proportionnalité des éléments linéaires.

230. En particulier, on peut se proposer de rechercher une représentation d'une surface sur un plan, avec conservation des angles. Soit la surface d'élément linéaire

$$Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda\,d\mu + Gd\mu^2.$$

Cherchons à déterminer deux fonctions

$$\lambda = \lambda(u, v), \qquad \mu = \mu(u, v),$$

telles que l'on ait identiquement

$$Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda\,d\mu + Gd\mu^2 = \rho(du^2 + dv^2), \tag{415}$$

(1) GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, chap. XXVIII; *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 5, fasc. 2.

ρ désignant une fonction positive indéterminée. A cet effet, écrivons le premier membre sous la forme [1]

$$\left(\sqrt{E}d\lambda + \frac{F+iH}{\sqrt{E}}d\mu\right)\left(\sqrt{E}d\lambda + \frac{F-iH}{\sqrt{E}}d\mu\right) \qquad \text{avec} \qquad H^2 = EG - F^2.$$

Le second membre s'annule en même temps que l'une des quantités $du + idv$ et $du - idv$.

Nous devons donc avoir, en désignant par σ et τ deux fonctions réelles de λ et de μ,

$$(416) \qquad \begin{cases} du + idv = (\sigma + i\tau)\left[\sqrt{E}d\lambda + \dfrac{F+iH}{\sqrt{E}}d\mu\right], \\ du - idv = (\sigma - i\tau)\left[\sqrt{E}d\lambda + \dfrac{F-iH}{\sqrt{E}}d\mu\right], \end{cases}$$

ou sinon les égalités obtenues en mettant dans les seconds membres — H à la place de H. En définitive, on sera donc conduit à déterminer les fonctions σ et τ de manière que l'expression

$$(e) \qquad (\sigma + i\tau)\left[\sqrt{E}d\lambda + \frac{F+iH}{\sqrt{E}}d\mu\right]$$

soit une différentielle totale. Cette condition suffit d'ailleurs, car si elle est remplie, la même propriété appartient à l'expression conjuguée. Les formules (**416**) nous montrent d'ailleurs que l'on aura

$$\rho = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Si nous exprimons la condition précédente, relative à l'expression (e), nous obtenons

$$(417) \qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{E}(\sigma + i\tau)\right] = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{F+iH}{\sqrt{E}}(\sigma + i\tau)\right].$$

L'expression $\sigma + i\tau$ est déterminée par une équation aux dérivées partielles. Donc le problème proposé possède une infinité de solutions.

231. Il est facile de voir comment ces solutions sont liées à l'une d'elles. Soient u, v un couple particulier de fonctions répondant à la question, et U, V tout autre couple y répondant également. A chaque couple λ, μ, c'est-à-dire à chaque point de la surface S, correspondent un point du plan des u, v et un point du plan des U, V. Puisque chacune de ces représentations planes conserve les angles, la correspondance qui existe entre elles conserve elle-même les angles. Alors, d'après ce que nous avons vu au n° 186, l'une des expressions $U + iV$ et $U - iV$ est une fonction analytique de $u + iv$.

232. M. Beltrami a rattaché à cet ordre d'idées une importante généralisation de

(1) La méthode que nous employons ici n'est applicable, cela va de soi, qu'aux multiplicités à deux dimensions.

la théorie des fonctions d'une variable complexe, en définissant une fonction analytique d'un point M de la surface qui a pour élément linéaire

$$Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda\, d\mu + Gd\mu^2.$$

Rappelons d'abord que la définition d'une fonction analytique d'un point d'un plan peut se formuler de la manière suivante; désignons par x, y les coordonnées rectangulaires de ce point; la fonction $u(x, y) + iv(x, y)$ sera une fonction analytique s'il existe une relation de la forme

$$du + i\,dv = (\sigma + i\tau)(dx + i\,dy),$$

σ et τ étant deux fonctions de x, y. De la même manière, nous dirons $u + iv$ est une fonction analytique du point de la multiplicité qui admet l'élément linéaire

$$Ed\lambda^2 + 2Fd\lambda\, d\mu + Gd\mu^2,$$

s'il existe une relation de la forme

$$du + i\,dv = (\sigma + i\tau)\left[\sqrt{E}\,d\lambda + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,d\mu\right],$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial \lambda} + i\dfrac{\partial v}{\partial \lambda}}{E} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \mu} + i\dfrac{\partial v}{\partial \mu}}{F + iH}.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$\frac{F\dfrac{\partial u}{\partial \lambda} - E\dfrac{\partial u}{\partial \mu}}{H} = \frac{\partial v}{\partial \lambda},$$

$$\frac{F\dfrac{\partial v}{\partial \lambda} - E\dfrac{\partial v}{\partial \mu}}{H} = -\frac{\partial u}{\partial \lambda},$$

dont l'ensemble équivaut au système suivant :

$$(418)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \lambda} &= -\frac{E}{H}\frac{\partial u}{\partial \mu} + \frac{F}{H}\frac{\partial u}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial v}{\partial \mu} &= \frac{G}{H}\frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{F}{H}\frac{\partial u}{\partial \mu}, \end{aligned}\right.$$

lequel possède une signification géométrique remarquable : *le gradient de v se déduit du gradient de u en un point* M *par une rotation d'un droit autour de ce point.* C'est ce qu'on pourrait vérifier en cherchant directement, pour la représentation paramétrique la plus générale, les formules qui expriment une telle rotation, puis en recourant aux formules (381) qui fournissent les composantes contrevariantes du gradient.

Il est plus rapide de remarquer que notre condition de définition entraîne la rela-

tion (415), moyennant un choix convenable de ρ. Dès lors, si nous adoptons u, v comme paramètres ayant pour mission de fixer la position d'un point sur la surface, l'élément linéaire prendra la forme

$$\rho(du^2 + dv^2) \tag{419}$$

pour laquelle la proposition annoncée est évidente. Si l'on élimine v entre les équations (418), on obtient pour u la condition

$$\Delta_2 u = 0.$$

La symétrie de l'équation (415) en u et v exige que v satisfasse à la même condition.

En résumé, ce point de vue constitue une généralisation de la théorie des fonctions analytiques, où le système (418) se substitue au système classique exprimant les conditions de monogénéité et l'équation de Beltrami $\Delta_2 u = 0$ à l'équation de Laplace.

233. Voici, sur ce sujet, une dernière remarque : soient une surface S et une surface S′ qui lui correspond point par point, avec conservation des angles. D'après la formule (395), l'expression

$$\sqrt{EG - F^2}\,\Delta_2 u$$

possède la même valeur pour les deux surfaces. Il s'ensuit que l'équation

$$\Delta_2 u = 0$$

est invariante dans la transformation.

Ainsi, d'une fonction harmonique dans une région du plan, nous déduirons une solution analytique de l'équation de Beltrami, définie sur une portion de surface sphérique, au moyen d'une inversion.

Nous sommes loin d'avoir même mentionné tous les problèmes importants qui se présentent dans la théorie des surfaces. Nous espérons cependant que le lecteur qui aura bien voulu suivre attentivement notre exposé, en reprenant fidèlement les calculs, pourra aborder ensuite avec beaucoup plus de facilité et d'intérêt les belles leçons de Gaston Darboux sur la théorie des surfaces. Le meilleur conseil que nous puissions lui donner en terminant est de s'attacher, au cours d'une telle étude, à traduire (autant que possible) les relations qu'il rencontrera en notations vectorielles. Il sera amené ainsi, d'une manière presque automatique, à en mieux dégager le sens et à en pénétrer toute la portée.

NOTES ET COMPLÉMENTS

I

Sur les principes du calcul tensoriel (1).

234. La dualité en géométrie linéaire. — Un des aspects les plus remarquables de la géométrie linéaire est son caractère dualistique. L'origine de cette dualité réside dans la symétrie d'une forme linéaire d'un vecteur libre, par rapport à ses coefficients d'une part, par rapport aux composantes du vecteur dont elle dépend d'autre part. Pour mieux faire ressortir cette dualité, pour lui donner une expression géométrique plus saisissante, nous avons défini au n° 142, la notion de *doublet*, ou système de deux plans parallèles, donné à une translation près. Un doublet constitue la représentation graphique d'une forme linéaire d'un vecteur libre. Soit un doublet, correspondant à une certaine forme. Il est convenu que cette forme prend la valeur 1 pour un vecteur joignant un point du premier plan du doublet à un point du second plan (car les plans du doublet ont un ordre imposé). On en déduit alors la valeur qu'elle acquiert pour un vecteur quelconque, en remarquant que si cette valeur est f pour un vecteur $\mathbf{V}$, elle sera λf pour un vecteur $\lambda \mathbf{V}$.

A chaque forme linéaire d'un vecteur libre correspond un doublet. Corrélativement, nous pouvons dire : *une forme linéaire d'un doublet détermine un vecteur libre*. Voici le sens précis de cette affirmation. Au n° 142, nous avons défini l'addition et, plus généralement, la composition linéaire des doublets. Raisonnons, pour fixer les idées, dans un espace tridimensionnel. Tout doublet résulte par composition linéaire de trois doublets particuliers Δ_1, Δ_2, Δ_3 ou doublets fondamentaux. Soit un doublet

$$\Delta = \alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \alpha_3 \Delta_3 ;$$

soit f une forme linéaire du doublet Δ; nous avons

$$f(\Delta) = \alpha_1 f(\Delta_1) + \alpha_2 f(\Delta_2) + \alpha_3 f(\Delta_3).$$

(1) Dans le début de cette section il ne faut attacher aucune importance à la place occupée par les indices, qui ont été répartis arbitrairement. Par contre, à partir du n° 238, cette place joue un rôle tout à fait essentiel.

A la forme f correspond un vecteur **V** tel qu'on ait

$$f(\Delta_1) = \Delta_1(\mathbf{V}),$$
$$f(\Delta_2) = \Delta_2(\mathbf{V}),$$
$$f(\Delta_3) = \Delta_3(\mathbf{V}),$$

en désignant d'une manière générale par $\Delta(\mathbf{V})$ le scalaire invariant qui exprime la valeur acquise, pour le vecteur **V**, par la forme linéaire de ce vecteur correspondant au doublet Δ.

Il y a donc symétrie complète entre les rôles joués par l'élément vecteur et par l'élément doublet. Étant donnée une proposition quelconque de géométrie linéaire, il lui correspond une proposition corrélative, dont l'énoncé se déduit de la première par échange du rôle de ces éléments.

235. Opposition de variances entre vecteurs et doublets. — Considérons indépendamment de tout système de coordonnées, un vecteur et un doublet. Ce dernier représente une forme linéaire, qui appliquée au vecteur donne un scalaire invariant, c'est-à-dire indépendant du système fondamental qu'on utilisera pour son calcul.

Imaginons qu'on ait eu recours à un certain système fondamental, et qu'on envisage un changement arbitraire de ce système. Nous avons établi au n° 18 le théorème suivant :

Les composantes de tous les vecteurs se transforment par la même substitution linéaire.

Soit maintenant un doublet, c'est-à-dire une forme linéaire d'un vecteur. Quel que soit ce doublet, en l'appliquant à un vecteur quelconque, on en déduit un scalaire invariant. Convenons (comme au n° 142) d'exprimer ce doublet linéairement à l'aide des trois doublets formés par les couples de faces opposées du parallélépipède construit sur les trois vecteurs fondamentaux. Soient $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ ces vecteurs et Δ_1, Δ_2, Δ_3 les doublets fondamentaux correspondants. Du vecteur **V** et du doublet Δ définis par

$$\mathbf{V} = x_1\mathbf{V}_1 + x_2\mathbf{V}_2 + x_3\mathbf{V}_3,$$
$$\Delta = u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2 + u_3\Delta_3,$$

on déduit le scalaire invariant $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$. Considérons la substitution linéaire subie par les composantes de **V** lors d'un changement de coordonnées, soit

$$(420)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = a_1^1X_1 + a_1^2X_2 + a_1^3X_3, \\ x_2 = a_2^1X_1 + a_2^2X_2 + a_2^3X_3, \\ x_3 = a_3^1X_1 + a_3^2X_2 + a_3^3X_3. \end{array}\right.$$

A la suite de ce changement de coordonnées, les composantes du doublet Δ sont trois nombres U_1, U_2, U_3 tels qu'on ait

$$U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3.$$

Cette identité détermine entièrement la substitution linéaire subie par les composantes d'un doublet. En effet, cette substitution est définie par un système

$$u_1 = b_1^1 U_1 + b_1^2 U_2 + b_1^3 U_3,$$
$$u_2 = b_2^1 U_1 + b_2^2 U_2 + b_2^3 U_3,$$
$$u_3 = b_3^1 U_1 + b_3^2 U_2 + b_3^3 U_3.$$

Nous devons avoir

$$a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1 + a_3^1 b_3^1 = 1, \qquad a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 + a_3^2 b_3^1 = 0, \qquad a_1^3 b_1^1 + a_2^3 b_2^1 + a_3^3 b_3^1 = 0,$$
$$a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2 + a_3^1 b_3^2 = 0, \qquad a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 = 1, \qquad a_1^3 b_1^2 + a_2^3 b_2^2 + a_3^3 b_3^2 = 0,$$
$$a_1^1 b_1^3 + a_2^1 b_2^3 + a_3^1 b_3^3 = 0, \qquad a_1^2 b_1^3 + a_2^2 b_2^3 + a_3^2 b_3^3 = 0, \qquad a_1^3 b_1^3 + a_2^3 b_2^3 + a_3^3 b_3^3 = 1.$$

Considérons le déterminant des a, et à chaque élément a_p^q de ce déterminant, faisons correspondre le nombre A_p^q défini au n° 43, et qui joue le rôle de coefficient de a_p^q dans le développement de ce déterminant par rapport aux éléments de la p^e ligne. La substitution des A_p^q aux b_p^q dans les premiers membres des relations précédentes donne $\mathfrak{D}$ en diagonale principale, et zéro partout ailleurs (1). Les b_p^q ont donc des valeurs de la forme $\frac{A_p^q}{\mathfrak{D}}$, si bien que l'on a, pour la substitution des u, les formules

$$(421) \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{A_1^1}{\mathfrak{D}} U_1 + \dfrac{A_1^2}{\mathfrak{D}} U_2 + \dfrac{A_1^3}{\mathfrak{D}} U_3, \\ u_2 = \dfrac{A_2^1}{\mathfrak{D}} U_1 + \dfrac{A_2^2}{\mathfrak{D}} U_2 + \dfrac{A_2^3}{\mathfrak{D}} U_3, \\ u_3 = \dfrac{A_3^1}{\mathfrak{D}} U_1 + \dfrac{A_3^2}{\mathfrak{D}} U_2 + \dfrac{A_3^3}{\mathfrak{D}} U_3. \end{cases}$$

D'où ce théorème :

Les composantes de tous les doublets se transforment également par une même substitution.

Bien entendu, la dualité veut que la substitution de transformation des vecteurs et celle de transformation des doublets soient *réciproques*. Pour traduire ce mode de réciprocité, on peut dire que ces substitutions sont *opposées* ou encore *contragrédientes* (Weyl).

Il ne faut pas confondre *substitutions opposées* et *substitutions inverses*. La substitution inverse de la substitution (430) est celle qui permet de passer des x aux X, soit

$$(420\ bis) \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{A_1^1}{\mathfrak{D}} x_1 + \dfrac{A_2^1}{\mathfrak{D}} x_2 + \dfrac{A_3^1}{\mathfrak{D}} x_3, \\ X_2 = \dfrac{A_1^2}{\mathfrak{D}} x_1 + \dfrac{A_2^2}{\mathfrak{D}} x_2 + \dfrac{A_3^2}{\mathfrak{D}} x_3, \\ X_3 = \dfrac{A_1^3}{\mathfrak{D}} x_1 + \dfrac{A_2^3}{\mathfrak{D}} x_2 + \dfrac{A_3^3}{\mathfrak{D}} x_3. \end{cases}$$

(1) Nous entendons par $\mathfrak{D}$ le déterminant des a_p^q.

On passe de la substitution opposée à la substitution inverse d'une même substitution (420) en échangeant dans le tableau qui définit la substitution opposée, le rôle des lignes et des colonnes.

Voici ce qui en résulte : pour que la substitution opposée et la substitution inverse de (420) coïncident, il faut et il suffit que le tableau des mineurs des éléments de $\mathfrak{D}$, ou, comme on dit, le tableau adjoint de $\mathfrak{D}$, soit symétrique par rapport à sa diagonale principale. Cela revient encore à dire que le tableau même des éléments de $\mathfrak{D}$ possède précisément cette propriété de symétrie $a_p^q = a_q^r$.

236. Les tenseurs en géométrie linéaire. — Un doublet est une forme linéaire d'un vecteur, douée d'un sens invariant, c'est-à-dire définie indépendamment du système fondamental. Corrélativement, un vecteur peut être considéré comme une forme linéaire d'un doublet.

D'une manière générale, nous donnerons le nom de *tenseur* à toute expression, fonction d'un certain nombre d'éléments, vecteurs et doublets, et dépendant linéairement de chacun de ces éléments. Nous supposons d'ailleurs essentiellement que les fonctions linéaires qui interviennent dans cette définition sont des fonctions homogènes.

D'après cette définition, il y a lieu de distinguer d'abord les tenseurs qui s'expriment par une fonction linéaire d'un seul doublet, ou bien par une fonction linéaire d'un seul vecteur, c'est-à-dire précisément le *vecteur* et le *doublet*. Nous dirons que ce sont les *tenseurs du premier ordre*. Nous venons de voir qu'ils ont des modes de variance contraires, et que de leur union naît un invariant. De l'étude faite au n° 79, il résulte que la *variance des composantes d'un vecteur s'oppose à celle du système des vecteurs fondamentaux* auquel il est rapporté, et de fait, si $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ désignent ces vecteurs fondamentaux, le jeu de ces variances est tel que l'expression

$$\mathbf{V} = x_1\mathbf{V}_1 + x_2\mathbf{V}_2 + x_3\mathbf{V}_3$$

garde un sens invariant.

Nous pouvons donc résumer tout cela en disant :

1° Le vecteur est un tenseur du premier ordre, *contrevariant* (vis-à-vis des vecteurs fondamentaux);

2° Corrélativement, le doublet est un tenseur du premier ordre, *covariant* (vis-à-vis des vecteurs fondamentaux) [1].

Cela posé, occupons-nous maintenant des tenseurs du second ordre. Nous sommes amenés immédiatement à distinguer trois tenseurs du second ordre :

1° ceux qui dépendent linéairement d'un premier doublet et linéairement d'un second;

2° ceux qui dépendent linéairement d'un vecteur et linéairement d'un doublet;

3° ceux qui dépendent linéairement d'un premier vecteur et linéairement d'un second.

D'une manière générale, un tenseur d'ordre n sera une expression en dépendance

(1) Inversement, le vecteur serait un tenseur d'ordre un, covariant vis-à-vis des doublets fondamentaux, etc....

linéaire avec des éléments, vecteurs et doublets, dont le nombre total est égal à n. Il y a donc $n+1$ espèces de tenseurs d'ordre n.

La notation adoptée pour représenter les tenseurs est intimement liée au principe de la composition des variances. C'est donc ce principe qui va nous occuper tout d'abord.

237. Principe de la composition des variances. — Si l'on se borne à envisager une multiplicité linéaire unique, tous les vecteurs possèdent dans cette multiplicité le même mode de variance, et tous les doublets le mode de variance opposé.

Pour faciliter les raisonnements qui vont suivre, nous aurons intérêt à embrasser de suite un horizon plus large et à étudier la composition de deux modes de variance absolument quelconques. Pour rattacher ce problème à un point de vue concret, nous l'énoncerons par exemple sous la forme suivante :

Prenons, pour fixer les idées, un premier espace linéaire E_1, à trois dimensions, rapporté à un certain système fondamental, soient x_1, x_2, x_3 les composantes d'un vecteur **V** de l'espace E_1 dans ce système. Soit un deuxième espace linéaire E_2, à deux dimensions et complètement indépendant du premier, soient y_1, y_2 les composantes d'un vecteur **W** de E_2 dans un certain système fondamental. Changeons simultanément, dans E_1 et E_2, de système fondamental. Nous aurons un mode déterminé de variance pour les x, un *autre* mode pour les y. Soit maintenant une forme, linéaire séparément par rapport à **V** et à **W**, et douée d'une signification invariante. Dans nos hypothèses, son expression peut s'écrire

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)y_2.$$

Il s'agit de trouver le mode de variance des coefficients a.

Ce problème est facile à résoudre. Écrivons les formules

$$(422) \qquad x_i = \alpha_{ih}X_h, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$
$$(423) \qquad y_j = \beta_{jk}Y_k, \qquad (j = 1,\ 2)$$

qui définissent, les unes la variance des y, les autres la variance des x. Pour éviter les abus d'écriture, nous réduisons, dans chacune de ces formules, le second membre à son terme général (de même qu'on dit, en analyse, la série u_n). Cette abréviation offre d'ailleurs l'avantage suivant : formons le produit x_iy_j, c'est le produit de deux sommes dont l'une a pour abréviation $\alpha_{ih}X_h$, l'autre a pour abréviation $\beta_{jk}Y_k$. Pour multiplier ces sommes, il faut ajouter tous les termes obtenus en multipliant un terme de la première par un terme de la seconde. Le terme général de ce produit est donc

$$\alpha_{ih}\beta_{jk}X_hY_k.$$

Autrement dit, l'abréviation du produit est le produit des abréviations; ou encore, *le mode d'abréviation employé ne trouble pas le mécanisme usuel de la multiplication.*

Cela posé, la variance des x_iy_j est définie à l'aide de la substitution linéaire qui

permet de déduire ces monomes des $X_h Y_k$. Or cette substitution est exprimée, sous forme abréviative, par les formules (au nombre de 6)

$$x_i y_j = \alpha_{ih} \beta_{jk} X_h Y_k,$$

dont l'écriture schématique se déduit des expressions schématiques (422) et (423) par le processus usuel de la multiplication.

Dès lors, si nous représentons schématiquement la forme initiale par

$$a_{ij} x_i y_j,$$

les a_{ij} auront le mode de variance contraire de celui qui vient d'être obtenu pour les monômes $x_i y_j$.

Par composition des variances, nous entendrons désigner cette opération qui permet de déduire le mode de variance des monômes $x_i y_j$ du mode de variance des x_i et de celui des y_j. C'est simplement pour permettre au débutant d'écrire les formules complètes que nous avons restreint le nombre des dimensions de E_1 et celui de E_2. Mais le processus de composition est manifestement indépendant de ces nombres. Nous pouvons d'ailleurs le généraliser et composer des variances en nombre quelconque : cette composition s'opérera toujours par une multiplication schématique. Elle est donc à la fois commutative et associative.

Voici une application immédiate des considérations précédentes : soit un espace linéaire E ; les vecteurs y sont doués d'un mode de variance, les doublets du mode contraire. Ce dernier mode peut être regardé comme distinctif d'un vecteur dans un *espace linéaire* E′, *corrélatif de* E. Dans cette nouvelle conception, les tenseurs du premier ordre sont respectivement les vecteurs de l'espace E et ceux de l'espace E′. Un tenseur quelconque est une formation invariante de vecteurs de E et de vecteurs de E′, linéaire par rapport à chacun de ces vecteurs.

238. Notations tensorielles. — Les conventions usitées dans la notation des tenseurs résultent naturellement de l'ensemble des remarques précédentes.

Soit un tenseur d'ordre $n = p + p'$, fonction linéaire invariante de p vecteurs de E et de p' vecteurs de E′. Choisissons dans E un système fondamental quelconque, et rapportons E′ au système corrélatif. Le tenseur étudié a une expression linéaire et homogène par rapport aux composantes de chaque vecteur de E ou de E′. Les composantes de ce tenseur sont, par définition, les coefficients de cette forme. Leur mode de variance est contraire au mode obtenu, en composant p fois la variance vectorielle E, et p' fois la variance vectorielle E′.

On peut d'ailleurs l'obtenir directement en composant p' fois la variance vectorielle E et p fois la variance vectorielle E′. Car si l'on fait le produit de p formes linéaires dépendant chacune d'un vecteur de E, et de p' formes linéaires dépendant chacune d'un vecteur de E′ (tous ces vecteurs étant distincts), on obtient un nouveau tenseur dont les composantes ont même mode de variance que celles du précédent. Or ces composantes se présentent ici comme des monômes, où p facteurs sont doués de la variance vectorielle E′, et les p' autres de la variance vectorielle E. (C. Q. F. D.)

C'est ce qu'on peut exprimer aussi de la façon suivante : *le passage d'un mode au mode opposé et la composition sont des opérations commutatives.*

Ces principes étant dégagés, il est naturel de faire les conventions suivantes :

Puisque tous les modes utiles résultent, par composition, de deux modes simples et contraires, nous conviendrons de désigner toujours toutes les composantes d'un même tenseur par une même lettre. Cette lettre sera munie d'indices, en nombre égal à celui des opérations de composition effectuées à partir des modes simples. Tous les indices répondant au mode contrevariant seront inscrits en bas et à droite, tous ceux qui répondent au mode covariant s'inscriront en haut et à droite. Lorsque nous écrirons par exemple

$$a_{hij}^{kl}$$

nous entendrons parler d'un tenseur, correspondant à la forme invariante

$$a_{hij}^{kl} u^h v^i w^j x_k y_l.$$

C'est notre définition primitive du tenseur, qu'on pourrait qualifier ainsi : *définition par opposition* (de variances). D'après le dernier principe établi, il est plus simple de dire :

Pour que les a_{hij}^{kl} soient les composantes d'un tenseur, trois fois contrevariant, et deux fois covariant, il faut et il suffit que leur mode de variance soit le même que celui des monômes

$$\xi^k \eta^l \alpha_h \beta_i \gamma_j,$$

c'est-à-dire soit le mode composé de trois contrevariances et de deux covariances.

On obtient ainsi, en quelque sorte, une *définition directe.*

Dans son ouvrage *Temps, espace, matière*, M. Weyl a constamment recours à la définition par opposition, et, de fait, cette méthode est extrêmement précieuse. Mais la définition directe rend elle-même de grands services. Elle nous fait connaître immédiatement l'effet d'un changement de coordonnées sur les composantes d'un tenseur, et ramène toujours les calculs qui permettent de l'effectuer à des multiplications schématiques.

Nous allons maintenant étudier les opérations de l'algèbre tensorielle. Pour faire la théorie de l'addition et de la multiplication, nous supposerons nos tenseurs définis par la méthode d'opposition. Au contraire, dans l'étude de la contraction, il sera commode de recourir à la définition directe.

239. Addition et multiplication des tenseurs. — Soient $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_p$ p vecteurs de E, $\mathbf{V}'_1, \mathbf{V}'_2, \ldots, \mathbf{V}'_{p'}$ p' vecteurs de E'. Soient en outre deux formes, possédant chacune la propriété de dépendre linéairement de l'un quelconque des vecteurs $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_p, \mathbf{V}'_1, \mathbf{V}'_2, \ldots, \mathbf{V}'_{p'}$ pris isolément. La même propriété appartient nécessairement à la somme de ces formes. D'où ce théorème :

De deux tenseurs de même ordre et de même espèce, on déduit un nouveau tenseur de même ordre et de même espèce par addition des composantes de

même rang. A l'addition, on peut d'ailleurs substituer l'opération plus générale de la composition linéaire.

Considérons maintenant deux formes invariantes absolument quelconques, la première dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, ..., $\mathbf{V}_p$ de E, et des vecteurs $\mathbf{V}'_1$, $\mathbf{V}'_2$, ..., $\mathbf{V}'_{p'}$ de E'. La seconde dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, ..., $\mathbf{U}_q$ de E et des vecteurs $\mathbf{U}'_1$, $\mathbf{U}'_2$, ..., $\mathbf{U}'_{q'}$, de E'. Le produit de ces formes est une nouvelle forme invariante dépendant linéairement de tous les vecteurs $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}'$, $\mathbf{V}'$. Ce produit est un tenseur dont les composantes ont $p+q$ indices de covariance et $p'+q'$ indices de contrevariance. Pour obtenir l'une quelconque de ces composantes, il suffit de multiplier l'une des composantes du premier tenseur par l'une des composantes du second.

240. Contraction. — La présence exclusive, dans nos compositions, de deux modes de variances simples et contraires nous procure la possibilité d'une opération nouvelle, la *contraction* : d'un tenseur elle permet de passer à un autre tenseur qui a perdu un indice de covariance et un indice de contrevariance. En voici le mécanisme très simple. Soit le tenseur dont l'une des composantes est

$$a_{hij}^{kl}.$$

Égalons les indices i et k, et considérons la somme

$$\alpha_{hj}^{l} = \Sigma_i a_{hij}^{il}. \qquad (424)$$

Je dis que les α_{hj}^{l} sont des composants tensoriels. En effet, la loi de variance des a_{hij}^{kl} est identique à celle de produits de la forme

$$\beta_{hj}^{l} x_i y^k,$$

en désignant par β_{hj}^{l} les composantes d'un tenseur : il s'ensuit que les nombres α_{hj}^{l}, définis par la relation (424) ont même loi de variance que les nombres

$$\beta_{hj}^{l} \Sigma_i x_i y^i,$$

ou en définitive que les β_{hj}^{l}.

Il est donc démontré que les α_{hj}^{l} sont des composants tensoriels.

241. Applications et exemples. — Écrivons les équations qui définissent une transformation linéaire de vecteur libre à vecteur libre, dans un espace E à n dimensions sous la forme

$$y_i = a_i^k x_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (425)$$

étant entendu que dans le second membre, il faut sommer pour les valeurs 1, 2, ..., n de l'indice k (1). Au vecteur $x_1 \mathbf{V}^{(1)} + \ldots + x_n \mathbf{V}^{(n)}$, où $\mathbf{V}^1$, ..., $\mathbf{V}^{(n)}$ désignent les vecteurs fondamentaux, correspondra dans le même espace le vecteur

$$y_1 \mathbf{V}^1 + \ldots + y_n \mathbf{V}^{(n)}.$$

(1) Si la transformation considérée était la transformation identique, on aurait $a_i^k = 0$ pour $\neq i$ et $a_i^k = 1$ pour $k = i$, et cela quel que soit le système fondamental considéré.

Considérons un vecteur de l'espace E′ corrélatif rapporté au système corrélatif du système des $V^1, \ldots, V^{(n)}$. Désignons par u^i l'une de ses composantes. La quantité

$$u^i y_i$$

où l'on suppose qu'une sommation est faite par rapport à l'indice i est un invariant. Il en est donc de même de la somme de terme général

$$a_i^k u^i x_k,$$

où la sommation porte à la fois sur les deux indices i et k. Ainsi les coefficients a_i^k de la substitution sont les composantes d'un tenseur d'ordre deux, avec deux indices contraires. Les transformations linéaires ont joué, dans ces leçons, un rôle extrêmement important. En les rencontrant, nous nous sommes ainsi trouvés en face d'éléments tensoriels, d'une complexité qui surpasse déjà celle du vecteur ordinaire (1).

Pour s'habituer aux notations, il est utile de faire la remarque suivante : les seconds membres des formules (435) se déduisent par contraction du tenseur ayant pour composantes $a_i^k x_h$, lorsqu'on égale les deux indices h et k. Le résultat de cette contraction est la destruction d'un degré de contrevariance et d'un degré de covariance. Comme vérification, nous devons donc nous attendre à trouver dans les premiers membres des éléments simplement contrevariants.

On obtient une interprétation analogue des deux autres tenseurs du second ordre, en étudiant :

1° Les correspondances linéaires

$$y^i = a^{ik} x_k$$

qui permettent de déduire d'un vecteur **X** de l'espace E un vecteur **Y** de l'espace E′ (ou si l'on préfère un doublet de l'espace E) ; et leurs coefficients a^{ik} sont les composantes d'un tenseur doublement covariant.

2° Les correspondances linéaires

$$y_i = a_{ik} x^k,$$

qui permettent de déduire d'un vecteur **X** de l'espace E′ (ou d'un doublet de l'espace E) un vecteur **Y** de l'espace E. Leurs coefficients a_{ik} sont les composantes d'un tenseur doublement contrevariant.

Dans le développement de ces leçons, nous avons rencontré d'autres tenseurs. Tout d'abord, le déterminant, qui s'est présenté à nous comme une forme alternée de vecteurs, en nombre n égal à celui des dimensions de l'espace, cette forme étant linéaire par rapport à chacun des vecteurs. Les coefficients de cette forme sont les composantes d'un tenseur : parmi ces composantes, les seules qui ne soient pas nulles s'obtiennent en attribuant aux indices (qui sont des indices de covariance) des

(1) C'est ainsi que moyennant des considérations métriques, nous avons vu apparaître dans l'étude infinitésimale du premier ordre des champs vectoriels un tenseur important, la déformation pure.

valeurs distinctes, c'est-à-dire en prenant pour l'ensemble de ces indices une permutation des n premiers nombres entiers. La composante obtenue est alors $\pm \mathfrak{D}$, en appelant $\mathfrak{D}$ la valeur du déterminant, suivant que la permutation considérée est paire ou impaire. Toutes les composantes d'un tenseur de cette nature sont donc des zéros ou des nombres de même valeur absolue (nos 34 et suivants).

Dans l'étude générale d'un système d'équations linéaires s'est présenté à nous le problème suivant : étant donnés p vecteurs $OA_1, \ldots, OA_p$ qui déterminent une multiplicité M_p (et par suite ne sont contenues dans aucune multiplicité d'ordre $< p$), rechercher si l'étendue

$$(\mathbf{OA}_1, \mathbf{OA}_2, \ldots, \mathbf{OA}_p)$$

est nulle ou différente de zéro. On suppose essentiellement la multiplicité M_p plongée dans un espace E dont le nombre n des dimensions surpasse p (no 46).

Pour résoudre ce problème, nous avons envisagé l'étendue d'ordre n déterminée par les p vecteurs précédents et par $n-p$ autres arbitraires $\mathbf{OA}_{p+1}, \ldots, \mathbf{OA}_n$. Nous avons donc introduit une forme invariante et alternée de ces $n-p$ vecteurs supplémentaires, linéaire par rapport à chacun d'eux. Nous avons donc encore mis en jeu un tenseur, et, à ce point de vue, les déterminants caractéristiques du théorème de Rouché sont purement et simplement certaines composantes d'un tenseur alterné.

Nous avons rencontré aussi un exemple où la contraction menait à un résultat qui a été établi autrement. Soit une transformation vectorielle linéaire définie par les équations schématiques

$$x_i = a_i^k x_k.$$

Après contraction, le tenseur des a_i^k donne naissance à un invariant, la somme de terme général a_i^i. Appliquons ce théorème à un champ vectoriel $\mathbf{V}$ (M) en portant notre attention sur la correspondance linéaire qui s'exerce entre dM et $d\mathbf{V}$. L'invariant précédent devient précisément égal à la *divergence* du champ.

242. Les tenseurs au point de vue métrique. — Passons de la géométrie linéaire à la géométrie métrique. A chaque doublet Δ, on peut faire correspondre univoquement un vecteur Φ, orthogonal aux plans de ce doublet, et d'expression $\Phi = \frac{\mathbf{u}}{a}$, a désignant la distance de ces plans, $\mathbf{u}$ une unité vectorielle perpendiculaire; la forme représentée par Δ prend ainsi, pour chaque vecteur $\mathbf{V}$, une valeur égale au produit scalaire $\mathbf{V}.\ \Phi$. On se ramène donc, en définitive, à la considération d'une seule classe de tenseurs du premier ordre, les vecteurs. La dualité, au lieu de s'exercer entre vecteurs et doublets, se manifestera alors entre deux modes de représentation des vecteurs, l'un contrevariant, l'autre covariant. Sous cette forme, cette dualité a été soulignée aux nos 78 et 79.

Pour plus de netteté, reprenons entièrement cette question en en éliminant toute donnée intuitive. Notre hypothèse fondamentale est l'invariance de la forme métrique, définie et positive

$$(426) \qquad 2T = g^{ik} x_i x_k, \qquad (g^{ik} = g^{ki})$$

ou, cela revient au même, l'invariance de sa forme polaire

$$g^{ik}x_i y_k.$$

2T exprime le carré de la longueur du vecteur (x_i), et sa forme polaire le produit scalaire des vecteurs (x_i) et (y_i) (1). En ordonnant ce dernier par rapport aux y_k, on peut l'écrire schématiquement $x^k y_k$ avec

$$(427) \qquad x^k = g^{ik}x_i \qquad \text{ou} \qquad x^k = \frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

L'invariance de la somme $x^k y_k$ entraîne la covariance des x^k, donc l'existence d'un doublet associé au vecteur x_i. Convenons de faire correspondre à ce doublet un vecteur Φ, tel que la valeur de la forme du doublet pour le vecteur **V** soit égale au produit scalaire Φ. **V**. D'après les hypothèses qui précèdent, le vecteur Φ sera précisément confondu avec le vecteur (x_i). Donc, nous sommes conduits à regarder le système (427) comme fournissant un mode covariant de représentation de ce dernier vecteur.

Résolvons les équations (427) par rapport aux quantités x_i. Nous en tirons de nouvelles équations

$$(428) \qquad x_i = g_{ik}x^k,$$

où g_{ik} s'obtient en divisant par g, valeur du déterminant des g^{ik}, le coefficient de l'élément g^{ik} lui-même dans le développement de ce déterminant par rapport à la ligne de rang i. En vertu de la symétrie de la forme fondamentale, les substitutions (427) et (428) sont à la fois opposées et inverses.

Les équations (428) conduisent à une nouvelle expression de la forme métrique

$$(429) \qquad 2T = g_{ik}x^i x^k,$$

qui fait appel à la forme quadratique adjointe de la forme (426).

Il importe de signaler le cas particulier où les variances opposées seraient identiques. S'il en est ainsi, on a nécessairement, d'après (437),

$$g^{ii} = 1 \qquad \text{et} \qquad g^{ik} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Les relations (428) montrent qu'on a aussi

$$g_{ii} = 1 \qquad \text{et} \qquad g_{ik} = 0 \qquad (i \neq k).$$

La forme fondamentale coïncide alors avec son adjointe et son expression développée est

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Ce cas est le seul où la distinction entre contrevariance et covariance disparaisse.

Les formules (427) et (428) sont d'un emploi fréquent : elles réalisent le passage des composantes contrevariantes d'un vecteur à ses composantes covariantes, et *vice*

(1) Cette notation abréviative, qui consiste à désigner un vecteur par une de ses composantes, de rang arbitraire, sera assez souvent utilisée par la suite.

versa : ou encore, au point de vue formel, elles permettent l'*élévation* et l'*abaissement* de l'indice.

243. Passons aux tenseurs d'ordre supérieur. Les tenseurs d'ordre un étant ramenés à un seul type, la même réduction est possible pour les tenseurs d'ordre deux (qui font correspondre linéairement deux tenseurs du premier ordre), pour les tenseurs d'ordre trois (qui font correspondre linéairement à un tenseur du second ordre un tenseur du premier), et ainsi de suite.

Cela posé, envisageons un tenseur d'ordre n, défini par opposition, c'est-à-dire par l'intermédiaire de la forme invariante écrite schématiquement

$$a_{hij}^{kl} u^h v^i w^j x_k y_l$$

(sur l'exemple actuel $n = 5$). L'une de ses composantes a_{hij}^{kl} a même variance que le monôme

$$(430) \qquad \alpha_h \beta_i \gamma_j \xi^k \eta^l,$$

corrélatif du monôme

$$(431) \qquad u^h v^i w^j x_k y_l.$$

Cela posé, la forme invariante précédente dépend linéairement des cinq vecteurs **U**, **V**, **W**, **X**, **Y**. On pourra à volonté adopter pour la représentation de l'un quelconque de ces vecteurs le mode contrevariant ou le mode covariant. Si l'on passe de l'un à l'autre, il faudra effectuer dans le monôme (431) un ou plusieurs déplacements d'indices, et, par suite, dans le monôme corrélatif (430) les déplacements inverses. Opérons par exemple dans le monôme (431) l'abaissement de l'indice h, en même temps que l'élévation des indices k et l. Le monôme corrélatif subira l'élévation de h, l'abaissement de k et de l. Sa nouvelle valeur s'écrira donc schématiquement

$$g_{rh} g^{sk} g^{tl} \alpha^r \beta_i \gamma_j \xi_s \eta_t,$$

la sommation étant faite pour l'ensemble de toutes les valeurs que peuvent acquérir r, s, t. La communauté de variance de a_{hij}^{kl} et du monôme (430) exige que l'on ait aussi

$$(432) \qquad a_{hij}^{kl} = g_{rh} g^{sk} g^{tl} a_{ijst}^{r},$$

d'où la règle suivante :

Dans l'écriture schématique, l'abaissement ou l'élévation de chaque indice s'opère comme si cet indice était isolé.

D'après la définition des tenseurs par opposition, les g^{ik} *sont les composantes* ***d'un tenseur.*** A chaque forme bilinéaire de deux vecteurs, il correspond une transformation linéaire, définie de la manière suivante. Soit χ (**V**, $\mathbf{V}_1$) la forme donnée : la transformation fait correspondre au vecteur $\mathbf{V}_1$ un vecteur $\mathbf{V}_1'$, tel qu'on ait l'identité

$$\chi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1) = \mathbf{V} . \mathbf{V}_1'.$$

Si nous prenons en particulier pour χ (**V**, $\mathbf{V}_1$) la forme polaire de la forme métrique, $\mathbf{V}_1'$ coïncidera avec $\mathbf{V}_1$. La transformation linéaire qui correspond au tenseur des g^{ik} est donc la *transformation* ***identique.***

Les équations (427) et (428) expriment, sous une autre forme, le même fait. Elles définissent une transformation linéaire par laquelle les composantes (d'un certain mode) d'un vecteur sont définies en fonction des composantes (de l'autre mode) du même vecteur. Cette transformation est donc bien la transformation identique. Il en résulte immédiatement que les composantes mixtes du *tenseur fondamental* (c'est-à-dire du tenseur composé, dans le mode doublement covariant, des g^{ik}) ont les valeurs

$$g_i^i = 1, \qquad g_k^i = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq k.$$

C'est d'ailleurs ce que l'application de la règle d'abaissement de l'indice pouvait faire prévoir. Cette règle donne en effet

$$g_k^i = \sum_h g_{hk} g^{ih}.$$

Or le second membre est égal au quotient par g du développement de ce déterminant si l'on a $i = k$; il s'annule si i et k sont distincts.

Un nouvel abaissement d'indice montrerait de même que les composantes doublement contrevariantes du tenseur fondamental sont précisément les g_{ik}.

Bien entendu, l'élévation et l'abaissement consécutifs d'un même indice donnent un effet résultant nul. Il est facile de le vérifier grâce à la règle de calcul qui permet d'effectuer ces déplacements. En effet, de x^k on passe par un abaissement à $\sum_i g^{ik} x_i$, puis à

$$\sum_i \sum_h g_{ih} g^{ik} x = \sum_h \left(\sum_i g_{ih} g^{ik}\right) x^h.$$

C'est seulement pour $h = k$ que la parenthèse n'est pas nulle; comme elle est alors égale à l'unité, on retrouve x^k.

244. Extension du produit vectoriel. — D'une forme bilinéaire de deux vecteurs **V** et **V**′, on déduit, par un processus invariant, une autre forme analogue en échangeant ces vecteurs. Donc, de la définition des tenseurs par opposition, il résulte que si les c_{ik} sont les composantes d'un tenseur doublement contrevariant, il en est de même des c_{ki}.

Soient alors deux vecteurs (a_i) et (b_i). Les nombres $c_{ik} = a_i b_k$ constituent, d'après la règle de multiplication, les composantes d'un tenseur doublement contrevariant. La même conclusion s'étend donc aux $a_k b_i$ et, par soustraction, aux quantités

$$a_i b_k - a_k b_i,$$

qui forment un tenseur alterné. Dans l'espace à trois dimensions, ce tenseur a trois composantes nulles, et six autres non nulles, deux à deux opposées. Après avoir choisi pour le déterminant $| a_i, b_i, c_i |$ un signe déterminé, on pourra dans un système fondamental orthogonal et normal (qui comporte la fusion des variances contraires), faire correspondre à ce tenseur le vecteur dont les trois composantes sont $a_2 b_3 - a_3 b_2$, $a_3 b_1 - a_1 b_3$, $a_1 b_2 - b_1 a_2$. C'est le produit vectoriel des deux vecteurs donnés, lequel fournit une représentation de l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs. Dans l'espace à plus de trois dimensions, la représentation de cette aire par un vec-

teur unique devient impossible : il faut conserver le tenseur précédent. La notion ordinaire de produit vectoriel a donc un caractère assez factice ; elle perd une grande partie de son importance lorsqu'on adopte le point de vue du calcul tensoriel.

II

Sur les multiplicités de Riemann à plus de deux dimensions.

245. Construction d'une géométrie riemanienne à n dimensions. — La construction d'une géométrie localement euclidienne a été exposée aux nos 209, 210, 211, 213, pour le cas de deux dimensions. On passe au cas d'un nombre quelconque de dimensions par une généralisation toute naturelle. Suivant qu'on considère ou non comme possible le transport d'un étalon de longueur, sans altération, on obtient une géométrie conforme au point de vue de Riemann, ou au point de vue de M. Weyl.

Dans la suite, nous nous bornerons à étudier des multiplicités riemaniennes. Une telle multiplicité sera caractérisée par le carré de son élément linéaire, que nous écrivons sous forme schématique

$$ds^2 = g^{ik} dx_i dx_k, \qquad (433)$$

en sous-entendant dans le second membre une double sommation par rapport aux indices i et k. Cette entrée en matière marque notre intention de recourir aux notations du calcul tensoriel. De fait, les calculs qui nous seront nécessaires s'exercent symétriquement vis-à-vis des variables qui interviennent dans la représentation paramétrique de la multiplicité étudiée : c'est pour cela que l'appel aux indices réalisera par la suite une économie très sérieuse de temps et d'écriture.

Comme au no 210, nous appelons *point* un ensemble de valeurs $(x_1, x_2, \dots x_n)$. Nous définissons pareillement un *vecteur infinitésimal* dM, puis l'opération de *composition linéaire* des vecteurs infinitésimaux. En chaque point M, un *vecteur quelconque*, fini ou infinitésimal, s'exprimera par une combinaison linéaire des vecteurs fondamentaux $\frac{\partial M}{\partial x_1}, \frac{\partial M}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial M}{\partial x_n}$. Nous écrirons par exemple schématiquement

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x_i} dx_i, \qquad (434)$$

le second membre sous-entendant une sommation par rapport à l'indice i.

La notion de vecteur en un point M de la multiplicité est un cas particulier de la notion de *tenseur* en un point. Lors d'un changement de coordonnées

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots, \bar{x}_n),$$

la variance simple qui correspond aux dx_1, dx_2..., dx_n est définie par des relations qu'on peut écrire schématiquement

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} d\bar{x}_k.$$

C'est la *contrevariance* [1]. L'autre variance simple, la *covariance*, se rencontre immédiatement à l'occasion du problème suivant : envisageons une fonction de point (ou un champ scalaire) sur la multiplicité. Si cette fonction est invariante, il en est de même de sa différentielle totale

$$(435)\qquad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i,$$

donc les $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ se transforment par covariance. La loi de cette transformation s'exprime schématiquement par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i};$$

si nous posons $\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} = \alpha_i^k$, les deux modes simples et contraires de variance s'expriment donc ainsi :

mode contrevariant : $\qquad \xi_i = \alpha_i^k \bar{\xi}_k,$

mode covariant : $\qquad \bar{\xi}^i = \alpha_k^i \xi^k,$

la seconde formule étant à résoudre par rapport aux ξ^k pour être mise sous la forme qui correspond à la première [aux notations près, on obtient ainsi des formules analogues aux formules (431)].

Un tenseur quelconque en un point M de la multiplicité se distingue alors par un caractère déterminé de variance, obtenu en composant un certain nombre de fois les deux modes précédents. Grâce à l'intervention des considérations métriques, un tenseur possédera plusieurs modes de représentation. On passe des uns aux autres en appliquant la règle du n° 242, qui permet d'élever ou d'abaisser à volonté un indice. Le processus est toujours le même : on opère comme si cet indice était isolé. Or, dans ce cas, on obtient immédiatement

$$dx^k = g^{ik} dx_i,$$
$$dx_i = g_{ik} dx^k,$$

en désignant toujours par g_{ik} les coefficients de la forme quadratique adjointe du ds^2.

Appliquons cette règle du déplacement de l'indice au tenseur fondamental des g^{ik}. C'est un tenseur doublement covariant. Nous aurons

$$g^{ik} = g_l^i g^{lk}.$$

(1) Elle s'oppose en effet, en vertu de (434), à la variance des vecteurs fondamentaux $\frac{\partial M}{\partial x_i}$.

Cette égalité schématique, dont le second membre implique une sommation par rapport à l'indice l, a lieu quelles que soient les valeurs des indices i et k. Cela exige qu'on ait

$$g_i^i = 1, \qquad g_l^i = 0 \qquad \text{pour} \qquad l \neq i.$$

Remarques. — 1° Le vecteur de composantes covariantes $y^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ s'appelle encore le *gradient* de la fonction de point, φ. L'égalité (435) peut s'écrire

$$d\varphi = \mathbf{grad}\,\varphi \,.\, d\mathrm{M}.$$

C'est la généralisation immédiate de ce que nous avons vu au n° 217.

2° Considérons un champ vectoriel. Soit X_i l'une des composantes contrevariantes du vecteur du champ. Les lignes de champ sont définies par le système

$$(436) \qquad \frac{dx_1}{\mathrm{X}_1} = \frac{dx_2}{\mathrm{X}_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\mathrm{X}_n}.$$

Considérons l'équation dont le premier membre s'écrit schématiquement

$$(437) \qquad \mathrm{X}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

et qu'on peut écrire encore

$$(438) \qquad \mathbf{V} \,.\, \mathbf{grad}\, f = 0,$$

en désignant par **V** le vecteur du champ. Cette équation exprime la propriété suivante :

La différentielle de f, prise le long d'une ligne de champ quelconque, est égale à zéro : autrement dit, le long d'une ligne de champ, la fonction f possède une valeur constante. Ainsi, pour obtenir une intégrale f de l'équation (437), on fera correspondre à chaque ligne de champ un nombre variant continûment avec cette ligne.

Cette remarque explique le lien qu'on rencontre en analyse entre l'intégration du système (436) et celle de l'équation (437) (1).

246. Analyse tensorielle sur une multiplicité de Riemann. — Nous venons d'indiquer la possibilité de généraliser la notion de gradient. Cela appelle une généralisation de la notion de rotationnel et du théorème de Stokes : c'est en effet par cette voie que nous avons montré l'équivalence des deux hypothèses

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{V} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V} = \mathbf{grad}\,\varphi,$$

dans le domaine de la géométrie ordinaire.

Soit un champ vectoriel **V**, nous désignerons par v^i l'une de ses composantes covariantes. La quantité $v^i dx_i$ est un scalaire invariant (on sous-entend une sommation par rapport à l'indice i). Considérons deux systèmes de différentielles d et δ. Nous avons, en abrégeant,

$$(439) \qquad \delta(v^i dx_i) = v^i \delta\, dx_i + \frac{\partial v^i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k.$$

(1) Cf. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. II, n° 393.

Si nous échangeons d et δ, il vient de même

$$d(v^i \delta x_i) = v^i d\delta x_i + \frac{\partial v^k}{\partial x_i} dx_i \delta x_k \tag{440}$$

[le second terme étant le terme général d'une somme, nous y disposons les indices de manière à mettre en évidence dans (439) et dans (440) des termes *semblables*]. Une soustraction membre à membre nous donne alors

$$\delta(v^i dx_i) - d(v^i \delta x_i) = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_k} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx_i \delta x_k. \tag{441}$$

Puisque le premier membre est un invariant, les quantités

$$\rho^{ik} = \frac{\partial v^i}{\partial x_k} - \frac{\partial v^k}{\partial x_i} \tag{442}$$

sont les composantes d'un tenseur du second ordre, doublement covariant. C'est le *rotationnel* généralisé. Pour que le champ **V** dérive d'un gradient, ou encore pour que la somme $v^i dx_i$ soit une différentielle totale, il faut et il suffit que ce rotationnel généralisé soit nul.

Voici maintenant la généralisation du théorème de Stokes. Traçons dans la multiplicité étudiée une multiplicité à deux dimensions seulement : en langage analytique, définissons $x_1, x_2, \dots x_n$ en fonction de deux paramètres λ et μ,

$$x_1 = x_1(\lambda, \mu), \qquad x_n = x_n(\lambda, \mu).$$

Nous dirons encore que cette multiplicité plus restreinte est une *surface* plongée dans l'espace constitué par la première multiplicité. Supposons qu'on délimite par une ligne fermée et sans point double une portion de cette surface, réductible par déformation continue à un point. Nous supposerons d'ailleurs la représentation paramétrique choisie de manière qu'une correspondance biunivoque soit réalisée entre la portion précédente de surface et une certaine aire (σ) du plan des λ, μ (restriction provisoire qui s'élimine forcément du résultat final, puisqu'on manipule des fonctions du premier degré du contour limite, au sens de M. Volterra). Considérons sur la portion de surface S le double système constitué par les lignes $\lambda =$ const. et par les lignes $\mu =$ const. Servons-nous des symboles d et δ pour caractériser respectivement deux déplacements infinitésimaux, effectués à partir d'un point M de S, le long des deux lignes du réseau qui se croisent en ce point. Considérons l'intégrale double, écrite schématiquement

$$\int\int_\sigma \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_k} - \frac{\partial v^k}{\partial x}\right) \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} \frac{\partial x_k}{\partial \mu} d\lambda\, d\mu.$$

Cette intégrale a un sens indépendant de la représentation paramétrique adoptée sur S : en effet, considérons un élément de cette intégrale, issu d'un petit rectangle du plan des λ, μ ayant ses côtés parallèles aux axes. L'élément d'aire correspondant

de la surface S est un parallélogramme infinitésimal. L'intégrale précédente étendue à ce parallélogramme a pour valeur

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial x_k}-\frac{\partial v^k}{\partial x_i}\right)dx_i\,\delta x_k$$

ou, en vertu de l'équation (441),

$$\delta(v^i dx_i)-d(v^i\delta x_i)=\mathbf{V}_{M_1}.d'M-\mathbf{V}_M.dM-(\mathbf{V}_{M_2}.\delta'M-\mathbf{V}_M.\delta M),$$

expression à laquelle on peut substituer l'intégrale de contour

$$\int \mathbf{V}.dM$$

étendue au périmètre de ce parallélogramme. Mais alors, puisque les deux intégrales précédentes sont des fonctions du premier degré du contour limite au sens de M. Volterra, la proposition devient intuitive, et on peut écrire symboliquement et en notation abrégée

$$\int\int_S\left(\frac{\partial v^i}{\partial x_k}-\frac{\partial v^k}{\partial x_i}\right)dx_i dx_k=\int \mathbf{V}.dM, \tag{443}$$

en entendant désigner par le premier membre la valeur commune à toutes les intégrales qui s'en déduiraient en exprimant les x en fonction de deux paramètres quelconques λ, μ, et en substituant au monôme $dx_i\, dx_k$ le monôme $\frac{\partial x_i}{\partial\lambda}\frac{\partial x_k}{\partial\mu}\,d\lambda\, d\mu$.

Nous allons maintenant nous préoccuper d'étendre aux multiplicités riemaniennes les plus générales la notion de déplacement parallèle et celle de courbure.

247. Théorie du déplacement parallèle. — Considérons un point $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la multiplicité étudiée, ainsi qu'un point M' infiniment voisin $(x_1+dx_1, \ldots, x_n+dx_n)$. Concevons encore (comme au n° 211) une correspondance linéaire entre l'ensemble des vecteurs en M et l'ensemble des vecteurs en M', qui se réduise à la transformation identique lorsque M' vient se confondre avec M. En appelant ξ_i les composantes contrevariantes d'un vecteur en M, cette correspondance sera définie abréviativement par les équations

$$d\xi_i=-\Gamma_i^{rs}\xi_r dx_s, \tag{444}$$

dont les seconds membres sont, à l'exemple de ceux des équations (354), linéaires par rapport au vecteur $dM=\mathbf{MM'}$ d'une part, par rapport au vecteur déplacé de l'autre.

Nous dirons que la transformation infinitésimale (444) est un déplacement parallèle, si, *au point* M *intéressé, il est possible d'annuler toutes les fonctions* Γ_i^{rs}, ou fonctions caractéristiques d'un déplacement parallèle infinitésimal [1], par un

(1) M. Weyl désigne ces fonctions par la locution : composantes de la *connexion affine*. Son idée essentielle consiste en effet après avoir établi en chaque point une géométrie linéaire des vecteurs de la multiplicité à mettre en connexion, par correspondance linéaire ou affine, l'ensemble des vecteurs en un point M et en un point infiniment voisin, et ainsi de proche en proche.

choix convenable de la représentation paramétrique. Imaginons un changement de représentation qui réalise cette condition, obtenu en posant

$$x_i = x_i(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

En remarquant que les ξ_i se transforment par la même substitution que les dx_i,

$$\xi_i = \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_k} \overline{\xi}_k,$$

nous aurons

$$d\xi_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \overline{x}_k \partial \overline{x}_h} \overline{\xi}_k d\overline{x}_h,$$

puisque, par hypothèse, les $d\overline{\xi}_k$ sont nuls. Mais alors, cela nous montre que les $d\xi_i$ doivent être des fonctions symétriques du vecteur dM et du vecteur déplacé. Donc, pour que les Γ_i^{rs} soient les fonctions caractéristiques d'un déplacement parallèle infinitésimal, il est nécessaire que l'on ait

$$\Gamma_i^{rs} = \Gamma_i^{sr}.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car si elle est remplie, on peut toujours trouver n fonctions x_i $(\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_n)$, telles qu'on ait, *au point* M,

$$\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \overline{x}_r \partial \overline{x}_s} = -\Gamma_i^{rs}.$$

Il importe de remarquer que les quantités Γ_i^{rs} ne sont donc pas des composants tensoriels, sinon de leur annulation au point M dans un système particulier de coordonnées résulterait leur annulation dans tous les systèmes. Elles admettent cependant même loi de variance qu'un tenseur doublement covariant par rapport aux indices r et s, simplement contrevariant par rapport à l'indice i, *dès que chaque x_i est une fonction linéaire de tous les $\overline{x}_k$* (hypothèse en vertu de laquelle toutes les dérivées partielles secondes sont nulles).

248. Faisons maintenant intervenir les hypothèses métriques. Soit

$$(445) \qquad ds^2 = g^{ik} dx_i dx_k$$

l'élément linéaire (écrit sous forme abrégée) de la multiplicité étudiée. Si nous postulons que le déplacement parallèle n'altère pas la longueur d'un vecteur, les Γ_i^{rs} se laissent déterminer d'une manière unique. Soit ξ_i l'une des composantes d'un vecteur en M. Le carré de sa longueur a pour expression schématique

$$(446) \qquad \mathfrak{L} = g^{ik} \xi_i \xi_k.$$

Après un déplacement parallèle infinitésimal, les composantes de ce vecteur sont devenues $\xi_i + d\xi_i$, avec

$$(447) \qquad d\xi_i = -\Gamma_i^{rs} \xi_r dx_s.$$

Annulons $d\mathfrak{L}$, ou, ce qui sera plus commode pour le raisonnement, la *différentielle du produit scalaire de deux vecteurs distincts*, de composantes respectives (ξ_i) et (ζ_k) [1].

$$dg^{ik}\xi_i\zeta_k + g^{ik}(\zeta_k d\xi_i + \xi_i d\zeta_k) = 0,$$

ou, en tenant compte des relations (447),

$$dg^{ik}\xi_i\zeta_k = g^{ik}\Gamma_i^{rs}\xi_r\zeta_k dx_s + g^{ik}\Gamma_k^{rs}\zeta_r\xi_i dx_s.$$

Rappelons encore que nous raisonnons ici sur des termes généraux de sommes, et que par suite, à ce point de vue, l'égalité schématique qui précède peut s'écrire tout aussi bien

$$dg^{ik}\xi_i\zeta_k = g^{rk}\Gamma_r^{is}\xi_i\zeta_k dx_s + g^{ir}\Gamma_r^{ks}\xi_i\zeta_k dx_s,$$

forme qui a l'avantage de *mettre en évidence les termes semblables*. Substituons au calcul des Γ_r^{is} celui des nouveaux nombres $\Gamma^{k,is}$ tels que

$$(448) \qquad \Gamma^{k,is} = g^{rk}\Gamma_r^{is}.$$

En égalant les termes semblables, nous obtiendrons finalement l'égalité ordinaire (non schématique)

$$(449) \qquad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_s} = \Gamma^{k,is} + \Gamma^{i,ks}.$$

Les Γ_r^{is} restent inaltérés par l'interversion des indices i, s. Il en est donc de même des $\Gamma^{k,is}$. Or cette interversion, opérée sur l'équation précédente, nous donne

$$\frac{\partial g^{sk}}{\partial x_i} = \Gamma^{k,is} + \Gamma^{s,ik}.$$

Un échange de k et s dans la relation (449) donnerait enfin

$$\frac{\partial g^{is}}{\partial x_k} = \Gamma^{s,ik} + \Gamma^{i,ks}.$$

Proposons-nous de tirer, des trois équations ci-dessus, la valeur de $\Gamma^{s,ik}$. Si nous ajoutons les deux dernières membre à membre, il vient

$$2\Gamma^{s,ik} + (\Gamma^{i,ks} + \Gamma^{k,is}) = \frac{\partial g^{sk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g^{si}}{\partial x_k}.$$

Or la valeur de la parenthèse est donnée précisément par la relation (449). Il vient donc finalement

$$(450) \qquad \Gamma^{s,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{sk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g^{si}}{\partial x_k} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_s}\right).$$

(1) On évite ainsi les difficultés auxquelles peut donner lieu l'introduction d'une forme quadratique : le jeu des indices est mis plus clairement en évidence.

Les quantités $\Gamma^{s,ik}$ ont été introduites pour la première fois par Christoffel, qui a employé pour les désigner une notation qui jette une note discordante dans le jeu harmonieux des indices du calcul tensoriel : Christoffel pose en effet

$$\Gamma^{s,ik} = \left[{i\,k \atop s}\right]. \tag{451}$$

Il y a donc tout avantage à éviter l'emploi de cette notation.

Pour calculer maintenant les fonctions caractéristiques d'un déplacement parallèle infinitésimal, il suffit de résoudre les équations (448) par rapport aux Γ_r^{ik}, ce qui donne, sous forme schématique,

$$\Gamma_r^{ik} = g_{rs}\Gamma^{s,ik}. \tag{452}$$

Pour représenter les Γ_r^{ik}, Christoffel a utilisé la notation

$$\Gamma_r^{ik} = \left\{{i\,k \atop r}\right\}, \tag{453}$$

qui est bonne à conserver, parce qu'elle est compatible avec les conventions que nous avons faites sur la place des indices (1).

Les quantités $\Gamma^{s,ik}$ sont fréquemment appelées symboles de première espèce, et les quantités Γ_r^{ik} ou $\left\{{i\,k \atop r}\right\}$ *symboles de seconde espèce*.

249. Formation de tenseurs par différentiation. — Au cours de ces leçons, nous avons étudié, dans la géométrie métrique ordinaire, les éléments différentiels du premier ordre d'un champ scalaire ou d'un champ vectoriel, ou bien, si l'on préfère, d'un champ tensoriel d'ordre zéro ou d'ordre un.

L'étude du premier ordre d'un champ scalaire a pour résultat la mise en évidence d'un champ vectoriel, le champ de son vecteur *gradient*. De même l'étude d'un champ vectoriel conduit à définir en chaque point de l'espace une transformation vectorielle linéaire. Ainsi, dans la géométrie ordinaire, nous avons déjà vérifié, dans deux cas particuliers, le résultat général suivant :

L'étude du premier ordre d'un champ tensoriel d'ordre n conduit à la définition d'un champ tensoriel d'ordre n + 1.

Une nouvelle confirmation de cet énoncé a d'ailleurs été donnée aussi (section VIII de la troisième partie) lorsque nous avons dit un mot des champs scalaires et des champs vectoriels sur une surface. Bien plus, au n° 246, nous avons étendu la notion de gradient d'un champ scalaire à une multiplicité riemanienne quelconque. Nous avons montré que si, dans le mode de représentation choisi, la fonction scalaire étudiée a pour expression $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, son gradient a pour composantes covariantes

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}.$$

(1) Sur la place occupée par les indices, nous avons jugé opportun de faire la convention inverse de celle qu'emploient la plupart des auteurs. Cela permet en particulier de conserver aux symboles de Christoffel de seconde espèce (les plus employés) leur notation classique.

Ce que nous avons ainsi réalisé pour un champ tensoriel d'ordre zéro, il s'agit de le généraliser à un champ tensoriel d'ordre n, et d'en déduire, par un processus invariant de différentiation, un nouveau champ tensoriel d'ordre $n+1$.

Déjà, ce que nous avons dit au n° 220 nous montre qu'on est tenu de prendre certaines précautions en la matière. Une idée se présente naturellement à l'esprit : soit ξ_i la composante contrevariante de rang i d'un champ vectoriel. On peut se demander si les nombres $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}$ ne constitueraient pas un tenseur mixte d'ordre deux. S'il en était ainsi, les quantités $d\xi_i$ seraient les composantes d'un vecteur contrevariant : or la théorie du déplacement parallèle nous montre immédiatement l'absurdité d'une telle supposition. Considérons en effet le cas particulier où le champ vectoriel étudié serait *stationnaire* en M, c'est-à-dire où on passerait du vecteur du champ en M au vecteur du champ en un point M′ infiniment voisin par un déplacement parallèle infinitésimal. Si les $d\xi_i$ formaient un vecteur, les Γ_i^{rs} formeraient eux-mêmes un tenseur. Ainsi la dérivation pure et simple des composantes (qui serait applicable dans un espace intégralement linéaire pour lequel les Γ_i^{rs} s'annulent en coordonnées rectilignes) n'est pas applicable sur une multiplicité de Riemann.

Dans le même ordre d'idées, et avant d'aborder la solution du problème, faisons encore la remarque suivante. Soit une multiplicité riemanienne rapportée à une certaine représentation paramétrique. En un point de cette multiplicité, nous avons utilisé les vecteurs fondamentaux $\frac{\partial M}{\partial x_i}$ et montré la légitimité de la formule

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x_i} dx_i,$$

le second membre impliquant une sommation par rapport à l'indice i. Cette formule fournit, en un point déterminé de la multiplicité, une représentation géométrique d'un vecteur infinitésimal quelconque. Mais comme nous n'avons pas défini, sur notre multiplicité, la dérivation géométrique des vecteurs, nous devrons nous abstenir d'appliquer à cette égalité vectorielle les méthodes de différentiation géométrique applicables aux vecteurs de l'espace ordinaire [1].

250. C'est de la définition tensorielle par opposition et de la théorie du déplacement parallèle que nous allons déduire le processus de différentiation cherché.

(1) Soit une surface lieu du point M (λ, μ). Les vecteurs fondamentaux sont $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial M}{\partial \mu}$. Soit **V** un champ vectoriel quelconque

$$\mathbf{V} = h\frac{\partial M}{\partial \lambda} + k\frac{\partial M}{\partial \mu},$$

h et k étant des fonctions de λ et de μ. Si l'on applique le processus de la dérivation géométrique à cette égalité, c'est qu'on suppose cette surface plongée dans un espace euclidien, et alors la différentiation effectuée est celle que nous avons envisagée au début de la troisième partie de ces leçons. Il importe alors de remarquer que les vecteurs $\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda \partial \mu}$, $\frac{\partial^2 M}{\partial \mu^2}$ qui naissent de cette différentiation ne sont plus situés dans le plan tangent à la surface : ce ne sont plus des vecteurs de cette multiplicité.

Puisque nous nous plaçons au point de vue métrique, nous pouvons toujours supposer que tous les indices aient été élevés dans les composantes du tenseur. Écrivons, pour fixer les idées, le tenseur attaché à la forme invariante

$$\psi = \varphi^{ik}\xi_i\eta_k.$$

Calculons la variation infinitésimale $d\psi$ subie par ψ lorsque les deux vecteurs (ξ_i), (η_k) subissent à partir du point M un déplacement parallèle infiniment petit. Nous obtenons

$$d\psi = \frac{\partial \varphi^{ik}}{\partial x_s}\xi_i\eta_k dx_s - \varphi^{ik}\xi_i\Gamma_k^{rs}\eta_r dx_s - \varphi^{ik}\eta_k\Gamma_i^{rs}\xi_r dx_s.$$

Dans le second membre sont écrits les termes généraux de trois sommes : modifions dans les deux derniers le rôle des indices de manière à réaliser la coordination des termes semblables. Il vient

$$d\psi = \left(\frac{\partial \varphi^{ik}}{\partial x_s} - \varphi^{ir}\Gamma_r^{ks} - \varphi^{rk}\Gamma_r^{is}\right)\xi_i\eta_k dx_s.$$

Nous obtenons le résultat suivant :

Les fonctions

$$\Phi_s^{ik} = \frac{\partial \varphi^{ik}}{\partial x_s} - \varphi^{ir}\Gamma_r^{ks} - \varphi^{rk}\Gamma_r^{is} \text{ (sommation par rapport à } r\text{)}$$

sont les composantes d'un nouveau champ tensoriel, dont l'ordre s'est élevé d'une unité, par l'apparition d'un indice supplémentaire de covariance, d'où le nom de DÉRIVATION COVARIANTE souvent donné à cette importante opération.

Pour compléter cet exposé, examinons le cas où, dans le tenseur initial, se présenteraient des indices des deux modes. Pour un vecteur défini dans le mode contrevariant, les formules du déplacement parallèle sont

$$d\xi_i = -\Gamma_i^{rs}\xi_r dx_s.$$

Or, nous avons, dans tout déplacement parallèle,

$$d(\xi_i\zeta^i) = 0,$$

et par suite

$$\xi_i d\zeta^i + \zeta^i d\xi_i = 0,$$

d'où

$$\xi_i d\zeta^i - \zeta^i\Gamma_i^{rs}\xi_r dx_s = 0;$$

établissons la coordination des indices pour la mise en évidence des termes semblables. Il vient

$$\xi_i(d\zeta^i - \Gamma_r^{is}\zeta^r dx_s) = 0.$$

Cette identité par rapport aux ξ_i exige que

$$d\zeta^i = \Gamma_r^{is}\zeta^r dx_s.$$

Cette formule permet alors d'effectuer la dérivation covariante d'un tenseur dont les composantes sont écrites dans un mode absolument quelconque.

Soit par exemple le champ tensoriel des φ^{ij}_{kl}. On écrit

$$\psi = \varphi^{ij}_{kl}\xi_i\eta_j u^k v^l,$$

d'où

$$d\psi = \left[\frac{\partial\varphi^{ij}_{kl}}{\partial x_s}\xi_i\eta_j u^k v^l - \varphi^{ij}_{kl}\Gamma^{rs}_{i}\xi_r\eta_j u^k v^l - \varphi^{ij}_{kl}\Gamma^{rs}_{j}\xi_i\eta_r u^k v \right.$$

$$\left. + \varphi^{ij}_{kl}\Gamma^{ks}_{r}\xi_i\eta_j u^r v^l + \varphi^{ij}_{kl}\Gamma^{ls}_{r}\xi_i\eta_j u^k v^r\right] dx_s.$$

En établissant la coordination des indices, on obtient le nouveau tenseur

$$\Phi^{ijs}_{kl} = \frac{\partial\varphi^{ij}_{kl}}{\partial x_s} - \varphi^{rj}_{kl}\Gamma^{is}_{r} - \varphi^{ir}_{kl}\Gamma^{sj}_{r} + \varphi^{ij}_{rl}\Gamma^{rs}_{k} + \varphi^{ij}_{kr}\Gamma^{rs}_{l}.$$

D'où la règle suivante :

On corrige le terme obtenu après la derivation pure et simple de termes complémentaires, formant des sommes en nombre égal à l'ordre du tenseur initial. Ces sommes sont formées par contraction à partir des résultats de multiplication des composantes du tenseur initial par les fonctions caractéristiques, avec le signe (—) lorsque la destruction d'indice s'exerce sur un indice de covariance du tenseur initial, et le signe (+) dans le cas contraire.

Remarque. — *La dérivée covariante du tenseur fondamental des g^{ik} est identiquement nulle.* En effet, lors d'un déplacement parallèle des vecteurs (ξ_i) et (η_i), l'invariant représenté schématiquement par $g^{ik}\,\xi_i\,\eta_i$ conserve une valeur constante. Sa différentielle est donc identiquement nulle. Or c'est de cette différentielle que nous avons déduit, par opposition, le tenseur dérivé du tenseur des g^{ik} : ce tenseur dérivé est donc lui-même identiquement nul.

251. Le calcul différentiel absolu. — L'étude systématique de la dérivation covariante et des lois de composition de cette opération avec celles de l'algèbre tensorielle a conduit MM. Ricci et Lévi-Civita à inaugurer une méthode de calcul extrêmement précieuse dans toutes les recherches relatives aux multiplicités riemaniennes. On lui donne le nom de *calcul différentiel absolu* (1).

Ainsi que nous venons de l'indiquer, la dérivation covariante permet de passer d'un tenseur à un autre tenseur dont l'ordre s'est accru d'une unité. On peut dire aussi, et c'est là un point de vue commode dans certains raisonnements, qu'elle permet de passer d'un tenseur initial et d'un vecteur unité (liés à un même point de la multiplicité) à un autre tenseur de même ordre (également lié à ce point). Le second tenseur constitue une *dérivée covariante* du premier, *dans la direction du vecteur unité* dont il vient d'être question.

Grâce à ce point de vue, que nous avons déjà rencontré plus ou moins explicitement (2), on peut dire :

(1) Nous ne pouvons ici que mentionner la récente et remarquable thèse de M. René Lagrange sur cet important sujet (*Annales de Toulouse*, 1923).

(2) C'est effectivement cet ordre d'idées que nous avons adopté pour obtenir, au numéro

Un vecteur, et plus généralement *un tenseur d'ordre quelconque*, *subissent un déplacement parallèle si leur dérivée covariante*, *prise suivant la direction du déplacement du point d'application*, *est nulle*.

Soit Θ un tenseur quelconque. Nous représenterons par $\mathfrak{D}_\Delta \Theta$ sa dérivée covariante prise dans la direction Δ. Si le tenseur est d'ordre zéro, c'est-à-dire se réduit à un scalaire, la dérivée covariante s'identifie avec la dérivée ordinaire.

Cela posé, pour établir les règles du calcul différentiel absolu, on se ramène aux règles correspondantes du calcul différentiel ordinaire, en recourant toujours à ce principe qui nous a servi de point de départ :

Pour faire subir à un tenseur Θ, dans la direction Δ, une dérivation covariante, on fait correspondre à Θ un scalaire variable, en lui opposant des vecteurs astreints à un déplacement parallèle. Le scalaire F ainsi obtenu sera une fonction bien déterminée, le long d'une ligne tangente à Δ. La dérivation ordinaire, dans la direction Δ, appliquée à F, fournit une nouvelle forme invariante, linéaire par rapport à chacun des vecteurs figurant dans F, soit $\mathfrak{D}_\Delta F$. Cette forme $\mathfrak{D}_\Delta F$ définit, par opposition, le tenseur dérivé $\mathfrak{D}_\Delta \Theta$.

C'est par cette méthode qu'on établit les deux théorèmes suivants, qu'il nous suffira d'énoncer :

I. *La dérivée covariante de la somme de plusieurs tenseurs est la somme de leurs dérivées covariantes.*

II. *Soit un champ tensoriel* Θ, *déduit par multiplication des champs tensoriels* Θ_1 *et* Θ_2,

$$\Theta = \Theta_1 \Theta_2.$$

L'on a

$$\mathfrak{D}_\Delta \Theta = \Theta_2 \mathfrak{D}_\Delta \Theta_1 + \Theta_1 \mathfrak{D}_\Delta \Theta_2.$$

Non moins important est le théorème suivant :

III. *L'ordre d'une contraction et d'une dérivation covariante est indifférent.*

Nous laisserons au lecteur le soin de le vérifier sur des exemples.

Voici des applications simples de ces théorèmes :

1° Une élévation d'indice équivaut à une multiplication par le tenseur fondamental des g^{ik} suivie d'une contraction. Or, la dérivée covariante du tenseur des g^{ik} est nulle. De ce résultat et des théorèmes II et III, on conclut que l'*ordre d'une élévation d'indice et d'une dérivation covariante est également indifférent.* Même résultat pour un abaissement d'indice.

2° Soit le produit scalaire **U**. **V**. Il est formé à partir des deux tenseurs d'ordre un constitués respectivement par **U** et par **V**, à l'aide d'une multiplication, qui donne

précédent, l'expression de la dérivée covariante. En effet, du tenseur variable nous avons déduit une fonction scalaire, en lui opposant des vecteurs astreints à un déplacement parallèle infinitésimal. A cause de la non-intégrabilité de cette dernière opération, il est impossible de considérer ces vecteurs comme empruntés à des champs donnés à l'avance. L'idée la plus intuitive sera donc de concevoir ce déplacement effectué le long d'une ligne déterminée. La notion la plus primordiale est bien alors celle de dérivée covariante dans une direction.

un tenseur d'ordre deux, et d'une contraction. Les théorèmes II et III fournissent alors l'expression de sa dérivée dans la direction Δ

$$\mathfrak{D}_\Delta(\mathbf{U}.\mathbf{V}) = \mathbf{U}.\mathfrak{D}_\Delta \mathbf{V} + \mathbf{V}.\mathfrak{D}_\Delta \mathbf{U},$$

formule qui est identique à celle du calcul vectoriel dans l'espace euclidien.

En particulier, la dérivée de $\mathbf{U}^2$ sera

$$2\mathbf{U}.\mathfrak{D}_\Delta \mathbf{U}.$$

252. Examinons sommairement la double dérivation d'un champ tensoriel, dans deux directions issues d'un point et caractérisées par les vecteurs unités (ξ_i) et (η_i).

Prenons d'abord un champ scalaire $f(x_1, x_2 ..., x_n)$. Sa dérivée, dans la direction du vecteur (ξ_i), a pour expression schématique

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\xi_i.$$

Donnons au point $(x_1, x_2 ..., x_n)$ un déplacement infinitésimal suivant le vecteur (η_i), et, en même temps, imprimons au vecteur (ξ_i) le déplacement parallèle correspondant. La dérivée précédente subit un accroissement dont l'expression schématique est

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\xi_i\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\xi_i dx_k - \frac{\partial f}{\partial x_i}\Gamma_i^{uv}\xi_u dx_v.$$

Une coordination d'indices fournit dès lors l'expression schématique de la dérivée cherchée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_u \partial x_v}\xi_u \eta_v - \Gamma_i^{uv}\frac{\partial f}{\partial x_i}\xi_u \eta_v.$$

De sa symétrie par rapport aux deux vecteurs (ξ_u), (η_v), on conclut à la possibilité d'intervertir, pour un champ scalaire, l'ordre de deux dérivations.

Mais c'est là un fait exceptionnel. Il ne se généralise ni aux champs tensoriels quelconques, ni même aux champs scalaires pour un nombre arbitraire de dérivations. Il nous suffira de noter ce résultat pour mettre en garde contre des interversions *a priori* séduisantes et en réalité non légitimes. Le mode de raisonnement à employer dans ces recherches est d'ailleurs celui que nous venons d'appliquer à la double dérivation des champs scalaires.

Cette impossibilité d'intervertir, en général, l'ordre de deux dérivations covariantes, donne un prix spécial à la remarque suivante. Convenons, lorsque $x_1, x_2 ...,$ x_n sont fonctions d'un paramètre α, d'appeler *dérivée covariante du vecteur* (λ_i) *par rapport à ce paramètre*, le nouveau vecteur dont les composantes sont

$$\mu_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha} + \Gamma_i^{pq}\lambda_q\frac{\partial x_p}{\partial \alpha}.$$

Cette définition est naturelle puisque le vecteur $(\mu_i\, d\alpha)$ représente l'excès géométrique sur le vecteur du champ en M (point obtenu pour la valeur α), du vecteur du champ en M′ (point obtenu pour la valeur $\alpha + d\alpha$) transporté en M parallèlement à lui-même. Cela posé, voici la remarque annoncée :

Si M *dépend de deux paramètres s et α*, de manière à décrire, au sein de la multiplicité étudiée, une sous-multiplicité bidimensionnelle, *la dérivée covariante du vecteur* $\frac{\partial M}{\partial s}$ *par rapport au paramètre α est égale à la dérivée covariante du vecteur* $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ *par rapport au paramètre s.*

En effet, l'expression commune de ces deux dérivées a pour forme schématique

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial s} + \Gamma_i^{pq} \frac{\partial x_p}{\partial s} \frac{\partial x_q}{\partial \alpha}.$$

253. Variation infinitésimale de la longueur d'un arc. — La remarque précédente permet de calculer la variation infinitésimale de la longueur d'un arc de courbe et de montrer que le résultat a une forme tout à fait analogue à celle que nous avons obtenue dans l'espace euclidien.

Soit s l'abscisse curviligne d'un point sur la courbe initiale. Sur toutes les courbes variées possibles, nous prélevons une famille à un paramètre α, la courbe $\alpha = 0$ coïncidant avec la courbe initiale. Le passage de celle-ci à une courbe variée infiniment voisine est défini en donnant, le long de la courbe initiale, le vecteur $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ en fonction de s. Cela posé, la dérivée de l'intégrale

$$\int_A^B \sqrt{\left(\frac{dM}{ds}\right)^2} ds$$

par rapport au paramètre α, pour la valeur $\alpha = 0$, sera

$$\int_A^B \frac{dM}{ds} \cdot \mathfrak{D}_\alpha \frac{dM}{ds} ds,$$

où nous avons omis d'écrire le radical en dénominateur, dont la valeur est l'unité, et où nous avons désigné par $\mathfrak{D}_\alpha$ une dérivation covariante par rapport au paramètre α. Or, d'après ce qui précède,

$$\mathfrak{D}_\alpha \frac{dM}{ds} = \mathfrak{D}_s \frac{\partial M}{\partial \alpha},$$

et par suite

$$\frac{dM}{ds} \cdot \mathfrak{D}_\alpha \frac{dM}{ds} = \mathfrak{D}_s\left(\frac{dM}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial \alpha}\right) - \mathfrak{D}_s\left(\frac{dM}{ds}\right) \cdot \frac{\partial M}{\partial \alpha}.$$

Il en résulte que la variation cherchée, qui s'obtient en multipliant par $\delta\alpha$, aura pour expression finale

$$\mathbf{T}_B . \delta B - \mathbf{T}_A . \delta A - \int_A^B \mathfrak{D}_s\left(\frac{dM}{ds}\right) . \delta M ds,$$

en employant exactement les mêmes notations qu'en géométrie euclidienne.

En particulier, l'intégrale disparaît de l'expression précédente le long des lignes telles que l'on ait

$$\mathfrak{D}_s\left(\frac{dM}{ds}\right) = 0,$$

ou encore telles que le vecteur unité de la tangente se déplace parallèlement le long de ces lignes. Nous continuerons à appeler *géodésiques* les lignes possédant cette propriété.

254. Lignes géodésiques. — Les lignes géodésiques sont indifféremment, d'après ce qui vient d'être dit, celles le long desquelles le vecteur unité de la tangente subit un déplacement parallèle, ou celles qui annulent le terme intégral de la variation première de la longueur d'un arc. Si nous continuons à désigner par s l'abscisse curviligne d'un point M sur une telle ligne, les coordonnées $x_1, x_2 \dots, x_n$ de ce point seront des fonctions de s satisfaisant au système différentiel suivant (forme schématique) :

$$g^{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=1, \tag{454}$$

$$\frac{d^2x_r}{ds^2}+\Gamma_r^{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=0. \tag{455}$$

La sommation doit être effectuée dans les premiers membres par rapport aux indices i et k. En outre, il y a lieu d'écrire l'équation (455) pour les valeurs $1, 2 \dots, n$ de l'indice r. Pour déterminer une intégrale du système ci-dessus, on donnera pour une valeur déterminée de s, les valeurs de $x_1, x_2 \dots, x_n$ et celles des dérivées $\frac{dx_1}{ds} \dots$, $\frac{dx_n}{ds}$, ces dernières étant astreintes à satisfaire à la condition (454). La solution dépend donc de $2n-1$ constantes arbitraires. Mais puisque s ne figure pas explicitement dans les coefficients des dérivées, l'une de ces constantes s'introduit additivement à côté de s, sous la forme $s+C$. Les lignes géodésiques dépendent donc en définitive de $2n-2$ constantes arbitraires.

De la formule de variation de la longueur d'un arc, on tire des conséquences pareilles à celles que nous avons rencontrées en théorie des surfaces. Prenons, au sein de la multiplicité étudiée, une sous-multiplicité Σ_P à $n-1$ dimensions, et, par chaque point P de Σ_P, menons la géodésique orthogonale à Σ_P. Ces géodésiques forment un système à $n-1$ paramètres. Portons sur chacune d'elles, à partir de P, un arc PM, de longueur déterminée. Le lieu de M est une multiplicité Σ_M orthogonale aux géodésiques précédentes. On dit encore que les multiplicités Σ_M sont parallèles.

Caractérisons chaque point M de la multiplicité initialement donnée par les $n-1$ nombres jouant le rôle de coordonnées curvilignes de P sur Σ_P et par l'abscisse curviligne $s=\overset{\frown}{PM}$. L'élément linéaire de la multiplicité initiale sera lié à celui des multiplicités Σ^M par la formule

$$dM^2=ds^2+d_1M^2,$$

en appelant dM un vecteur infinitésimal quelconque de la multiplicité initiale, et d_1M un vecteur appartenant plus spécialement à Σ_M. Il en résulte que sur chaque géodésique, un arc suffisamment petit possède la propriété de réaliser un minimum de la longueur dans le champ des lignes qui joignent ses deux extrémités, et en effet, l'intégrale

$$\int_{s_A}^{s_B}\sqrt{ds^2+d_1M^2}$$

l'emporte sur

$$\int_{A}^{s_B} ds.$$

Les systèmes privilégiés de géodésiques à $n-1$ paramètres dont il vient d'être question généralisent les congruences de normales de la géométrie ordinaire. Notons que les vecteurs unitaires tangents aux géodésiques d'un tel système forment un champ vectoriel, défini dans toute la multiplicité initiale, et que le vecteur du champ au point M a pour expression **grad** s.

Cette propriété admet la réciproque suivante : *soit, dans la multiplicité initiale, un champ scalaire* θ, *astreint à vérifier l'équation aux dérivées partielles* (1)

$$\text{(456)} \qquad \mathbf{grad}^2 \theta = 1.$$

Les lignes du champ de vecteurs **grad** θ *sont des géodésiques.*

En effet, caractérisons un point M de la multiplicité initiale, d'une part au moyen de la valeur θ_M du champ scalaire θ en ce point, d'autre part à l'aide des $n-1$ paramètres qui caractérisent une ligne du champ **grad** θ, ou, si l'on préfère, qui fournissent l'intersection P de cette ligne avec la multiplicité Σ_P lieu des points pour lesquels $\theta = 0$. En vertu de l'orthogonalité des multiplicités Σ_M définies par $\theta =$ const. aux lignes du champ **grad** θ, on pourra mettre l'élément linéaire de la multiplicité initiale sous la forme

$$dM^2 = K d\theta^2 + d_1 M^2,$$

en supposant que $d_1 M$ désigne un vecteur situé plus spécialement sur une multiplicité $\theta =$ const. La relation (456) exige que l'on ait $K = 1$, car en se déplaçant le long d'une ligne de champ, $d_1 M$ sera nul, et il faut que l'accroissement infinitésimal de l'arc soit égal à celui de θ. Donc, nous aurons simplement

$$dM^2 = d\theta^2 + d_1 M^2,$$

formule qui entraîne pour les lignes de champ, sur chaque arc suffisamment petit, la propriété de fournir un minimum de longueur, et par suite d'annuler le terme intégral de la variation première. Ces lignes sont donc bien des géodésiques.

255. Tenseurs de courbure d'une multiplicité riemanienne. — Nous avons donné précédemment (n° 216) une définition intrinsèque de la *courbure totale* d'une surface au moyen de la théorie du déplacement parallèle. Faisons déplacer parallèlement un vecteur, de manière que son origine décrive un contour fermé C de la surface. Quel que soit le contour C l'angle dont le vecteur a tourné a pour valeur

$$\iint \frac{dS}{R_1 R_2}$$

et cela définit implicitement la courbure totale.

(1) L'équation (456) joue ici le même rôle que l'équation de Jacobi en Dynamique des systèmes. Si l'on connaît une intégrale complète de cette équation, on pourra en déduire, par des dérivations, les équations des lignes géodésiques en termes finis.

C'est dans un ordre d'idées analogue que nous allons définir les tenseurs de courbure d'une multiplicité riemanienne quelconque. Envisageons encore le déplacement parallèle d'un vecteur, lorsqu'on impose à l'origine de ce vecteur de décrire une courbe fermée. Après un tour complet, le vecteur aura pris une direction nouvelle, et par suite de l'accroissement du nombre des dimensions, un angle ne saurait suffire à déterminer cette nouvelle direction.

Nous nous appuierons sur la propriété suivante. Soient $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ deux vecteurs, ou mieux leurs positions initiales, soient $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ leurs positions finales. Le déplacement parallèle n'altère pas les éléments métriques du système $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, qui est donc égal au système $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$. Donc la correspondance entre la position initiale d'un vecteur en M, et sa position finale (après déplacement parallèle et circulation opérée sur C) est un *déplacement* (¹) : soient **V** cette position initiale, **W** la position finale, nous poserons

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{W} - \mathbf{V}.$$

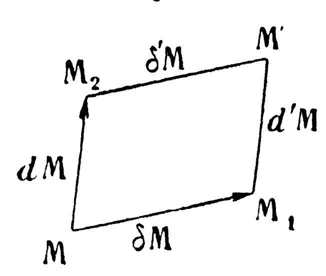
Soient ξ_α les composantes contrevariantes de **V**. Les composantes contrevariantes $\Delta \xi_\alpha$ de $\Delta \mathbf{V}$ se déduiront de **V** par certaines équations linéaires

$$\Delta \xi_\alpha = f_\alpha^\beta \xi_\beta.$$

Ce résultat est indépendant de la forme du contour C. Il est d'ailleurs manifeste que la grandeur vectorielle $\Delta \mathbf{V}$ est *fonction du premier degré* du contour C (et d'un signe lié au sens de ce contour) suivant M. Volterra. On peut donc l'évaluer à l'aide de la méthode que nous avons utilisée au n° 247 pour étendre le théorème de Stokes. Cette méthode consiste à définir une surface passant par le contour C au moyen d'équations

$$x_1 = x_1(\lambda, \mu), \quad \ldots, \quad x_n = x_n(\lambda, \mu)$$

et à décomposer cette surface, au moyen du double réseau des courbes $\lambda =$ const., $\mu =$ const. en parallélogrammes infiniment petits. Grâce à ce fait que $\Delta \mathbf{V}$ est fonction du premier degré, il suffit de l'évaluer pour une circulation sur le périmètre d'un de ces parallélogrammes.



Servons-nous, comme précédemment et dans la même acception, des caractéristiques d et δ. Remarquons immédiatement que $\Delta \mathbf{V}$ offrira les caractères suivants :

1° ce sera une fonction linéaire des deux vecteurs dM et δM;

2° cette fonction linéaire sera également alternée.

Cela étant, imaginons au point M un vecteur **V**, de composantes contrevariantes ξ_i. Faisons parcourir à son origine le petit vecteur $\mathbf{MM}_1 = \delta$M, le vecteur se déplaçant parallèlement à lui-même. Au point M_1, nous obtenons un vecteur $\mathbf{M}_1\mathbf{V}_1$, de composantes $\xi_i + \delta\xi_i$ et nous aurons

$$\delta\xi_i = -\Gamma_i^{rs} \xi_r \delta x_s.$$

(1) Cette affirmation a un sens précis, puisque les vecteurs en M de la multiplicité étudiée ont mêmes relations mutuelles que les vecteurs d'une multiplicité linéaire, dont la métrique est donnée par la forme fondamentale (élément linéaire) en M.

Prenons la figure MM_1V_1 et faisons lui subir un nouveau déplacement parallèle, qui amène M_1 en M'. Nous aurons

$$d(\delta\xi_i) = -d\Gamma_i^{rs}\xi_r\delta x_s - \Gamma_i^{rs}\xi_r d\delta x_s + \Gamma_i^{rs}\Gamma_r^{uv}\xi_u\delta x_s dx_v.$$

En effectuant le déplacement parallèle le long du trajet MM_2M', on serait conduit de même à la formule

$$\delta(d\xi_i) = -\delta\Gamma_i^{rs}\xi_r dx_s - \Gamma_i^{rs}\xi_r\delta dx_s + \Gamma_i^{rv}\Gamma_r^{us}\xi_u\delta x_s dx_v,$$

où nous avons écrit le dernier terme en effectuant la coordination d'indices qui permet d'établir entre les deux formules ci-dessus une correspondance par termes semblables. Pour avoir ΔV, il suffit de retrancher membre à membre, ce qui donne

$$\Delta\xi_i = \xi_r(\delta\Gamma_i^{rs}dx_s - d\Gamma_i^{rs}\delta x_s) + (\Gamma_i^{rs}\Gamma_r^{uv} - \Gamma_i^{rv}\Gamma_r^{us})\xi_u\delta x_s dx_v,$$

d'où, en coordonnant les deux parties du second membre,

$$\begin{aligned}\Delta\xi_i &= \xi_u(\delta\Gamma_i^{uv}dx_v - d\Gamma_i^{us}\delta x_s) + (\Gamma_i^{rs}\Gamma_r^{uv} - \Gamma_i^{rv}\Gamma_r^{us})\xi_u\delta x_s dx_v \\ &= \left(\frac{\partial\Gamma_i^{uv}}{\partial x^s} - \frac{\partial\Gamma_i^{us}}{\partial x_v} + \Gamma_i^{rs}\Gamma_r^{uv} - \Gamma_i^{rv}\Gamma_r^{us}\right)\xi_u\delta x_s dx_v.\end{aligned}$$

Les quantités

$$\text{(457)} \qquad R_i^{u,sv} = \frac{\partial\Gamma_i^{uv}}{\partial x_s} - \frac{\partial\Gamma_i^{us}}{\partial x_v} + \Gamma_i^{rs}\Gamma_r^{uv} - \Gamma_i^{rv}\Gamma_r^{us}$$

forment un tenseur du quatrième ordre, car en formant la somme de terme général $\zeta^i\Delta\xi_i$, on obtiendra une forme linéaire invariante des quatre séries de variables

$$\zeta^i, \qquad \xi_u, \qquad \delta x_s, \qquad dx_v.$$

Le tenseur précédent a été obtenu pour la première fois par Riemann. On l'appelle communément *tenseur de Riemann-Christoffel*. De ce tenseur, on déduit par une première contraction un tenseur du second ordre, dont une composante est

$$R^{sv} = \sum_u R_u^{u,sv}.$$

Soit R_s^v une composante du même tenseur écrite dans le mode mixte. Par une nouvelle contraction, on en déduit un invariant

$$R = \sum_v R_v^v.$$

On est ainsi amené à considérer, pour une multiplicité riemanienne, trois tenseurs de courbure, l'un réduit à un invariant R, fonction de point sur cette multiplicité, un autre du second ordre, et enfin un tenseur du quatrième ordre, qui engendre les deux précédents à l'aide de contractions. Le tenseur du second ordre joue un rôle important dans la théorie de la gravitation d'Einstein.

256. Propriétés du tenseur de Riemann-Christoffel. — D'après la définition précédente, le tenseur de Riemann-Christoffel établit une correspondance linéaire

entre un vecteur **V**, en un point M de la multiplicité, et l'accroissement géométrique $\Delta \mathbf{V}$ subi par ce vecteur, lorsque son origine accomplit un tour sur le périmètre du parallélogramme déterminé par les deux vecteurs δM et dM d'origine M, le sens de cette circulation étant déterminé par l'ordre de ces vecteurs. D'après un résultat général indiqué au n° 81, la donnée de cette correspondance linéaire équivaut à celle de la forme bilinéaire

$$\mathbf{V}'.\Delta \mathbf{V}$$

pour chaque paire de vecteurs **V**, **V**′ liés au point M. Ce produit scalaire sera défini d'une part, en fonction bilinéaire de **V** et de **V**′, d'autre part en fonction bilinéaire de δM et de dM. Nous aurons donc

$$\mathbf{V}'.\Delta \mathbf{V} = f(\mathbf{V}, \mathbf{V}', \delta M, dM), \tag{458}$$

où f est une fonction linéaire de chaque vecteur dont elle dépend.

Nous avons vu déjà que si on échange dM et δM, $\Delta \mathbf{V}$ se change en $-\Delta \mathbf{V}$. Donc f est une fonction alternée de dM et de δM.

D'autre part, quelle que soit la paire de vecteurs **V**, **V**′ liés à M, le produit scalaire **V**. **V**′ reste invariant dans le déplacement parallèle. Donc on a

$$\mathbf{V}.\Delta \mathbf{V}' = -\mathbf{V}'.\Delta \mathbf{V}.$$

Autrement dit, f est également une fonction alternée de **V** et de **V**′.

Les coefficients de la forme f sont d'ailleurs les composantes du tenseur de Riemann, écrites en utilisant exclusivement le mode covariant : en effet, si le système fondamental en M était orthogonal et normal, tous les modes s'équivaudraient. Or, dans ce cas, les coefficients de la forme f seraient identiques à ceux de la transformation vectorielle linéaire qui fait passer de $\Delta \mathbf{V}$ à **V**, d'après la loi même de formation du produit scalaire. Dans le cas général, les coefficients de f ont donc bien la signification que nous venons d'indiquer. Ces coefficients $R^{uk,sv}$ sont liés aux $R_i^{u,sv}$ définis par les relations (463), par les formules schématiques

$$R^{uk,sv} = g^{ik} R_i^{u,sv},$$

où le second membre implique une sommation par rapport à i, et qui s'obtiennent immédiatement en appliquant la règle d'élévation de l'indice.

Les deux propriétés d'alternance que nous venons de mentionner entraînent les relations

$$R^{uk,sv} = -R^{uk,vs}, \tag{459}$$
$$R^{uk,sv} = -R^{ku,sv}, \tag{460}$$

il y a un intérêt manifeste à rechercher la forme des $R^{uk,sv}$. Partons des relations (457) :

$$R_i^{u,sv} = \frac{\partial \Gamma_i^{uv}}{\partial x_s} - \frac{\partial \Gamma_i^{us}}{\partial x_v} + \Gamma_i^{rs}\Gamma_r^{uv} - \Gamma_i^{rv}\Gamma_r^{us}.$$

La multiplication chématique par g^{ik} nous donne immédiatement

$$R^{uk,sv} = g^{ik}\left(\frac{\partial \Gamma_i^{uv}}{\partial x_s} - \frac{\partial \Gamma_i^{us}}{\partial x_v}\right) + \Gamma^{k,rs}\Gamma_r^{uv} - \Gamma^{k,rv}\Gamma_r^{us}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_s}\Gamma^{k,uv} - \frac{\partial}{\partial x_v}\Gamma^{k,us} + \Gamma^{k,rs}\Gamma_r^{uv} - \Gamma^{k,rv}\Gamma_r^{us} - \left(\Gamma_i^{uv}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_s} - \Gamma_i^{us}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_v}\right).$$

Reportons-nous maintenant aux formules

$$\Gamma^{k,uv} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{uk}}{\partial x_v} + \frac{\partial g^{vk}}{\partial x_u} - \frac{\partial g^{uv}}{\partial x_k}\right),$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_s} = \Gamma^{i,ks} + \Gamma^{k,is}.$$

Il vient, après coordination d'indices et suppression de termes opposés,

$$(461) \qquad R^{uk,sv} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g^{kv}}{\partial x_u \partial x_s} - \frac{\partial^2 g^{uv}}{\partial x_s \partial x_k} - \frac{\partial^2 g^{ks}}{\partial x_u \partial x_v} + \frac{\partial^2 g^{us}}{\partial x_k \partial x_v}\right) - (\Gamma_r^{uv}\Gamma^{r,ks} - \Gamma_r^{us}\Gamma^{r\;\;v}).$$

Remarquons d'ailleurs que l'on a schématiquement (1)

$$\Gamma_r^{uv}\Gamma^{r,ks} = \Gamma^{r,uv}\Gamma_r^{ks},$$

ainsi que le montre la réduction des deux membres aux symboles de Christoffel de deuxième espèce, obtenue par l'abaissement d'un indice et la constatation que les termes semblables sont munis des mêmes coefficients.

Il résulte de là que l'on a

$$(462) \qquad R^{uk,sv} = R^{sv,uk},$$

et on obtient ainsi, à côté des propriétés d'alternance traduites par les équations (459) et (460) une nouvelle et importante propriété. Son interprétation géométrique est immédiate.

Alors que les propriétés d'alternance (459) et (460) exprimaient la dépendance linéaire du produit scalaire $\mathbf{V}'.\Delta\mathbf{V}$ vis-à-vis des aires des parallélogrammes construits sur les vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ d'une part, sur les vecteurs δM et dM de l'autre, la propriété (462) exprime que *ces parallélogrammes jouent un rôle symétrique.* Supposons que $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ soient des vecteurs infinitésimaux, et qu'on ait

$$\mathbf{V} = \delta_1 M, \quad \mathbf{V}' = d_1 M.$$

Notre propriété de symétrie peut se traduire par l'égalité suivante :

$$d_1 M.\Delta(\delta_1 M) = dM.\Delta_1(\delta M),$$

en convenant d'employer la caractéristique Δ pour désigner un accroissement géométrique obtenu par description du parallélogramme déterminé par les vecteurs δM, dM (ordre imposé), et la caractéristique Δ_1 pour désigner de même un accroissement géométrique obtenu par description du parallélogramme $\delta_1 M$, $d_1 M$ (ordre imposé).

(1) Toutes les égalités (461) et suivantes impliquent une sommation par rapport à l'indice r.

L'expression (457) des composantes mixtes du tenseur de Riemann-Christoffel permet de constater une autre propriété, qui se traduit par l'égalité

$$(463) \qquad R_i^{v, sv} + R_i^{s, vu} + R_i^{v, us} = 0;$$

il suffit, pour la vérifier immédiatement, de remplacer chaque terme par sa valeur (457). Voici l'interprétation géométrique de cette nouvelle relation.

Considérons trois vecteurs infinitésimaux δM, dM et d_1M ($= \mathbf{V}$) liés au point M. Les égalités (463) signifient l'annulation de la somme géométrique des trois vecteurs suivants :

1° variation éprouvée par d_1M, lors d'un déplacement parallèle le long du périmètre du parallélogramme (δM, dM) (ordre imposé);

2° variation éprouvée par δM, lors d'un déplacement parallèle le long du parallélogramme (dM, d_1M) (ordre imposé);

3° variation éprouvée par dM, lors d'un déplacement parallèle le long du parallélogramme (d_1M, δM) (ordre imposé).

Si l'on adopte exclusivement le mode covariant, les relations (463) s'écrivent encore

$$(464) \qquad R^{uk, sv} + R^{sk, vu} + R^{vk, us} = 0.$$

L'étude de ces relations est extrêmement importante.

257. Proposons-nous de dénombrer les composantes $R^{uk,sv}$ qui sont indépendantes. Un échange de u et k, ou de s et v n'a pour effet que de changer le signe. On prendra donc pour uk et pour sv les combinaisons, sans répétition (une répétition entraîne l'annulation) de n lettres prises deux à deux. On a donc à considérer N systèmes de valeurs uk, et N systèmes de valeurs sv en posant

$$N = \frac{n(n-1)}{2}.$$

D'autre part, l'échange de uk et de sv est indifférent. On a donc à considérer, d'une part N composantes où les combinaisons uk et sv sont identiques, d'autre part des composantes où la combinaison uk diffère de la combinaison sv. Le nombre de ces dernières est $\frac{N(N-1)}{2}$. Au total, cela fait

$$\frac{N(N+1)}{2}.$$

Mais il faut tenir compte de ce que les composantes sont liées par les relations (469). Or, il existe autant de relations distinctes de cette forme que de combinaisons sans répétition de n lettres 4 à 4, soit

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

Le nombre maximum de composantes indépendantes du tenseur de Riemann-Christoffel est donc

$$\frac{N(N+1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Ce nombre maximum est effectivement atteint, à la condition du moins de supposer que les g^{ik} sont des fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ choisies complètement au hasard. Admettant ce résultat dans le cas général, nous nous bornerons à le vérifier dans le cas des multiplicités à deux dimensions.

L'expression $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ se réduit alors à l'unité. Cela dénote, dans ce cas, l'impossibilité de réductions autres que celles que les raisonnements précédents laissaient prévoir. On doit en effet s'attendre à obtenir un invariant et un seul, la courbure totale. Le calcul complet est d'ailleurs facile. Écrivons l'élément linéaire

$$ds^2 = g^{11}dx_1^2 + 2g^{12}dx_1 dx_2 + g^{22}dx_2^2.$$

Les symboles de première espèce ont pour valeurs respectives (1)

$$\Gamma^{1,11} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_1}, \qquad \Gamma^{2,11} = \frac{\partial g^{12}}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_2},$$
$$\Gamma^{1,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_2}, \qquad \Gamma^{2,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_1},$$
$$\Gamma^{1,22} = \frac{\partial g^{12}}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_1}; \qquad \Gamma^{2,22} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_2}.$$

Les symboles de seconde espèce vaudront de même

$$\Gamma_1^{11} = \frac{1}{2g}\left(g^{22}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_1} - 2g^{12}\frac{\partial g^{12}}{\partial x_1} + g^{12}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_2}\right), \qquad \Gamma_2^{11} = \frac{1}{2g}\left(-g^{12}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_1} + 2g^{11}\frac{\partial g^{12}}{\partial x_1} - g^{11}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_2}\right),$$
$$\Gamma_1^{12} = \frac{1}{2g}\left(g^{22}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_2} - g^{12}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_1}\right), \qquad \Gamma_2^{12} = \frac{1}{2g}\left(g^{11}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_1} - g^{12}\frac{\partial g^{11}}{\partial x_2}\right),$$
$$\Gamma_1^{22} = \frac{1}{2g}\left(2g^{22}\frac{\partial g^{12}}{\partial x_2} - g^{22}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_1} - g^{12}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_2}\right), \qquad \Gamma_2^{22} = \frac{1}{2g}\left(-2g^{12}\frac{\partial g^{12}}{\partial x_2} + g^{12}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_1} + g^{11}\frac{\partial g^{22}}{\partial x_2}\right),$$

en posant

$$g = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{vmatrix}.$$

Plaçons-nous, pour simplifier les calculs, dans le cas où l'on aurait

$$g^{11} = 1, \qquad g^{12} = 0, \qquad g^{22} = K^2,$$

K^2 représentant le carré d'une fonction $k(x_1, x_2)$. On déduirait alors des relations précédentes

$$g = K^2.$$

Cherchons à déduire $R^{12,12}$ de la relation (461). Il vient, en écrivant tous les termes,

$$R^{12,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(K^2)}{\partial x_1^2} - \Gamma_1^{12}\Gamma^{1,12} - \Gamma_2^{12}\Gamma^{2,12} + \Gamma_1^{11}\Gamma^{1,22} + \Gamma_2^{11}\Gamma^{2,22}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2(K^2)}{\partial x_1^2} - \frac{1}{4K^2}\left[\frac{\partial(K^2)}{\partial x_1}\right]^2 = K\frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2}.$$

(1) Comparer aux formules (127) de la section III de la troisième partie.

Dans ce cas particulier, nous obtenons donc la relation

$$R^{12,12} = g\left(\frac{1}{K}\frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2}\right). \tag{465}$$

Cette quantité entre parenthèses est au signe près la *courbure totale* (n° 201).

Les autres composantes du tenseur de Riemann-Christoffel, telles que $R^{11,12}$, $R^{12,11}$ seraient nulles. Soit donc un vecteur (ξ_1, ξ_2), à l'origine duquel nous faisons décrire le périmètre du parallélogramme construit sur les vecteurs $(\delta x_1, \delta x_2)$ et $(dx_1\ dx_2)$. Les composantes covariantes de son accroissement seront

$$\Delta\xi^1 = \quad R^{12,12}\xi_2(\delta x_1 dx_2 - \delta x_2 dx_1),$$
$$\Delta\xi^2 = -R^{12,12}\xi_1(\delta x_1 dx_2 - \delta x_2 dx_1),$$

ou, en désignant par γ la courbure totale,

$$\Delta\xi^1 = -g\gamma\xi_2(\delta x_1 dx_2 - \delta x_2 dx_1),$$
$$\Delta\xi^2 = \quad g\gamma\xi_1(\delta x_1 dx_2 - \delta x_2 dx_1).$$

Ces relations mettent en évidence les liens existant, dans le cas de deux dimensions, entre la courbure totale et le tenseur de Riemann-Christoffel.

258. Cas des multiplicités euclidiennes. — Revenant au cas de n quelconque, nous allons établir le théorème suivant :

Pour qu'une multiplicité soit euclidienne, c'est-à-dire pour que son élément linéaire soit réductible à la forme

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2,$$

il faut et il suffit que le tenseur de Riemann-Christoffel s'annule en tout point de cette multiplicité.

1° La condition est nécessaire. Car si la multiplicité est euclidienne, les g^{ik} peuvent être réduits à des constantes. Donc les symboles de Christoffel Γ_i^{rs} et $\Gamma^{k,rs}$ sont nuls. D'après les formules (457), il en est donc de même des composantes $R^{ik,sr}$ du tenseur considéré.

2° La condition est suffisante. En effet, si ce tenseur s'évanouit identiquement, les équations aux différentielles totales, écrites schématiquement

$$d\xi_i = -\Gamma_i^{rs}\xi_r\, dx_s,$$

sont complètement intégrables. On peut donc définir le transport parallèle fini, sans se préoccuper du trajet suivi pour aller de la position initiale à la position finale. Cela permet d'abord de définir dans la multiplicité un champ vectoriel *uniforme* : un tel champ s'obtient en prenant un vecteur $\mathbf{M_0V_0}$ de la multiplicité, en un point M_0 de celle-ci, et en le transportant parallèlement à lui-même en tout autre point M. Les lignes de champ $\mathfrak{L}$ correspondantes sont des géodésiques. D'ailleurs, d'un champ uniforme, on déduit par dérivation covariante un tenseur d'ordre deux

$$T^{ik} = \frac{\partial\xi^i}{\partial x_k} - \Gamma_h^{ik}\xi^h,$$

qui se réduit identiquement à zéro. Donc le rotationnel généralisé $T^{ik} - T^{ki}$ d'un champ uniforme est nul. Par suite un tel champ peut s'écrire **grad** θ.

Soit donc un champ uniforme, dérivant de la fonction scalaire θ. Les lignes $\mathfrak{L}$ de ce champ sont des géodésiques orthogonales aux multiplicités $\theta = \text{const.}$ Envisageons sur deux quelconques de ces multiplicités, la correspondance entre les points situés sur une même ligne $\mathfrak{L}$. Nous allons établir qu'elle est isométrique.

En effet, si nous posons $x_1 = 0$ et si nous prenons pour lignes de coordonnées les lignes $\mathfrak{L}$, nous aurons pour la multiplicité initiale un élément linéaire

$$g^{ik} dx_i dx_k$$

tel qu'on ait

$$(466) \qquad g^{11} = 1, \qquad g^{i1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq 1.$$

Mais cet élément linéaire possède en outre d'autres propriétés, que nous allons obtenir en exprimant que les lignes $\mathfrak{L}$ sont parallèles, ou, ce qui revient au même, que le vecteur normal aux multiplicités $\theta = \text{const.}$ subit, lors d'une variation de son origine sur l'une de ces variétés, un déplacement parallèle. Or ce vecteur a pour composantes, dans le système adopté, 1, 0, ..., 0. Donc les hypothèses

$$dx_1 = 0, \qquad \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0,$$

doivent entraîner, quel que soit i, $d\xi_i = 0$. Donc tous les Γ_i^{1s}, pour les valeurs de s différentes de 1, doivent être nuls. En vertu de la relation

$$\Gamma^{k,1s} = g^{ik} \Gamma_i^{1s},$$

tous les $\Gamma^{k,1s}$ doivent aussi être nuls pour $s \neq 1$. Or nous avons

$$2\Gamma^{k,1s} = \frac{\partial g^{1k}}{\partial x_s} + \frac{\partial g^{sk}}{\partial x_1} - \frac{\partial g^{1s}}{\partial x_k}.$$

Le premier terme du second membre disparaît en vertu des relations (472). Il en est de même du troisième terme, puisque s est $\neq 1$. Finalement, on doit donc avoir, pour $s \neq 1$,

$$\frac{\partial g_{sk}}{\partial x_1} = 0,$$

relation qui montre que les g^{ik} non nuls (autres que $g^{11} = 1$) devront être indépendants de x_1. C'est bien ce que nous avions annoncé : toutes les multiplicités $\theta = \text{const.}$ sont rencontrées par les géodésiques $\mathfrak{L}$ en des points liés par une correspondance isométrique.

La démonstration peut alors être considérée comme achevée, si l'on fait appel au raisonnement par récurrence : en effet les multiplicités $\theta = \text{const.}$ possèdent la propriété de contenir entièrement les géodésiques de la multiplicité initiale, qui se présentent comme lignes de champ des champs uniformes orthogonaux au champ **grad** θ. En effet, les vecteurs de tels champs appartiennent aux multiplicités $\theta = \text{const.}$ Soit donc λ une géodésique de la multiplicité initiale orthogonale aux géodésiques $\mathfrak{L}$. Elle est située tout entière sur une multiplicité $\theta = \text{const}^{\text{te}}$, et elle en

constitue une géodésique, car un minimum réalisé dans un certain champ l'est, de ce fait, dans un champ plus restreint. Sur les multiplicités $\theta = \text{const.}$ on peut donc définir des systèmes de géodésiques λ parallèles, c'est-à-dire des champs uniformes, ou encore considérer le transport parallèle d'un vecteur comme une opération finie. Pour ces nouvelles multiplicités, le tenseur de Riemann-Christoffel est donc nul. Or l'ordre d'extension s'est abaissé d'une unité. Si donc, le théorème est vrai pour $n-1$, il est vrai pour n. Or, de ce que nous avons vu déjà, il résulte qu'il est vrai pour deux. Le théorème est donc établi.

259. Les multiplicités riemaniennes et les espaces euclidiens. — Dans la troisième partie de ces leçons, nous avons longuement insisté sur la théorie des surfaces. Nous avons subdivisé les propriétés métriques des surfaces en propriétés géodésiques et en propriétés métriques externes. C'est l'étude autonome des premières qui nous a conduit, par une généralisation toute naturelle, à l'étude des continus riemaniens. Inversement, nous avons montré qu'on peut trouver, dans un espace euclidien à trois dimensions, une infinité de surfaces admettant un élément linéaire donné, c'est-à-dire dont les propriétés géodésiques constituent la géométrie de la multiplicité de Riemann à deux dimensions qui correspond à cet élément linéaire. Ce théorème est un cas particulier du suivant :

Toute multiplicité riemanienne à n dimensions peut être plongée dans un espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ *dimensions.*

Nous prierons le lecteur d'admettre cette proposition, et nous nous bornerons à faire remarquer que le problème consistera, étant donné un élément linéaire

$$\sum_{ik} g^{ik} dx_i dx_k$$

à trouver certaines fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_p$ des paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telles que l'expression

$$dX_1^2 + dX_2^2 + \ldots + dX_p^2$$

soit identique à l'élément linéaire précédent. L'identification fournira un système de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations aux dérivées partielles à p fonctions inconnues. Le nombre minimum de dimensions à donner à l'espace euclidien considéré pour qu'il soit *capable de la multiplicité donnée* est alors égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, comme il est aisé de le concevoir.

III

Sur les principes de la Géométrie.

260. Sur la priorité exclusive le plus souvent accordée à la géométrie euclidienne. — Dans son ouvrage intitulé *Temps, Espace, Matière*, fréquemment cité au cours de ces Leçons, le professeur H. Weyl fait observer que les doutes sur la géométrie euclidienne remontent presque aux origines de cette géométrie elle-même, et cite à l'appui de cette thèse un mémoire de Proclus, au ve siècle de notre ère, qui contient des essais de négation du postulat des parallèles. Cependant, malgré tout l'intérêt de la tentative de Proclus, il faut reconnaître qu'elle est restée, pendant une bonne douzaine de siècles, une tentative isolée, que la négation du postulatum est restée longtemps pour tous les géomètres un objet de scandale. Aussi, pour l'écarter autant que possible d'une manière définitive, se sont-ils préoccupés, très souvent, de démontrer le postulatum en question. Aujourd'hui encore, la grande majorité de nos étudiants, voire même celle des maîtres qui enseignent les éléments de la géométrie, est moins avancée que Proclus. A vrai dire, ils ont, pour la plupart, entendu parler de l'impossibilité d'une démonstration du postulat des parallèles, et, s'armant de prudence, ils préfèrent ne pas risquer de se compromettre; mais, en leur for intérieur, ils sont persuadés qu'il y a là un véritable défi au bon sens, et que, malgré tout, il y a bien une priorité exclusive de la géométrie euclidienne.

A cause de cet état d'esprit, extrêmement répandu, il importe de donner à nos futurs agrégés quelques idées précises sur les principes de la géométrie. Ces idées, nous les avons indiquées en temps utile au cours de ces Leçons. Nous avons montré que la construction d'une géométrie abstraite s'opère par voie purement déductive, à partir de certains concepts fondamentaux, liés entre eux au moyen d'une réglementation par postulats, soumise à la seule condition de ne pas comporter d'incompatibilité logique. C'est dans cet ordre d'idées que nous avons édifié successivement la géométrie linéaire, la géométrie métrique, et la théorie autonome des multiplicités riemaniennes.

Il n'y a donc pas lieu de reprendre entièrement la question des principes de la géométrie. Nous nous attacherons plus spécialement à établir l'indépendance logique du postulat des parallèles vis-à-vis des autres postulats de la géométrie ordinaire. Cette étude nous fournira en même temps l'occasion d'en présenter la construction déductive à certains points de vue qui diffèrent de celui que nous avons exposé au cours des deux premières parties de ces leçons.

261. Les recherches de M. Hilbert. — La méthode suivie dans cet exposé a consisté à choisir comme concepts primordiaux le vecteur libre et le point, à édicter des postulats conduisant, par l'intermédiaire de la composition linéaire des vecteurs libres, à l'étude des multiplicités linéaires. On obtient ainsi la géométrie linéaire, dans

laquelle la notion de translation et celle de parallélisme peuvent être regardées comme préexistantes. On passe ensuite à la géométrie ordinaire ou métrique en posant l'invariance d'une forme quadratique fondamentale.

Cette construction logique est très différente de celle d'Euclide, où les notions préexistantes sont celles de point, de droite et de plan. M. Hilbert s'est proposé de donner une construction logique, conforme à l'ordre des propositions d'Euclide, et où la priorité soit donnée aux trois concepts fondamentaux que nous venons de nommer. Il a été ainsi conduit à une subdivision des concepts et des postulats en cinq catégories :

1° Concepts *point*, *droite* et *plan*, et postulats de l'appartenance. Ces postulats expriment des relations telles que les suivantes : existence et unicité d'une droite passant par deux points, d'un plan passant par trois points non alignés, pluralité des points d'une droite ou d'un plan, appartenance à un plan de la totalité d'une droite résultant de l'appartenance à ce plan de deux points de la droite, etc...

2° Concept *situé entre*, qui donne un sens à l'expression : B situé entre A et C, à supposer que ces lettres désignent trois points d'une droite, et *postulats de l'ordre*.

3° Concept *segments congruents* (ou égaux) et postulats de la *congruence* ou de l'égalité des figures.

4° *Postulat des parallèles.*

5° *Postulat de la continuité.*

Sans insister davantage, nous voyons que cette construction est plus compliquée que celle que nous avons donnée tout d'abord. Cela n'a rien d'étonnant si l'on songe qu'elle a été obtenue en jalonnant par des chaînons tous les vides logiques qui se trouvaient dans une construction préparée à l'avance par Euclide. Si fin géomètre qu'ait été le philosophe grec, on ne pouvait lui demander de trouver d'emblée la route la plus courte, et de ne pas donner la première place aux concepts qui semblent le plus directement issus de notre intuition expérimentale, qui résultent par idéalisation de l'ensemble des sensations visuelles et tactiles que nous procurent respectivement :

1° une parcelle infime de matière ;

2° un fil tendu ;

3° la surface libre d'un liquide au repos.

En revanche, cette construction d'Hilbert offre l'avantage suivant : elle se prête merveilleusement aux discussions sur l'indépendance logique des postulats et sur leur compatibilité. Que les postulats de la géométrie euclidienne soient compatibles, c'est ce qui résulte de la possibilité de faire correspondre à chaque concept fondamental de la géométrie une représentation dans le domaine des nombres, comme cela se fait couramment en géométrie analytique.

Pour ce qui est de la question de l'indépendance des postulats, il nous est impossible de la traiter en toute généralité. Nous remarquerons simplement que les géomètres qui ont cherché s'il est possible de *démontrer* le postulat des parallèles ont posé une question qui peut encore se formuler de la manière suivante :

Le postulat des parallèles est-il une dépendance logique des postulats des quatre autres catégories ?

Pour trancher cette question, il suffit de montrer qu'il est possible de construire une géométrie, exempte de toute incompatibilité logique, où l'on conserve les postulats des catégories I, II, III, V et où l'on substitue à l'énoncé du postulat d'Euclide cet énoncé contradictoire, proposé par Lobatchefski :

Par un point A, *extérieur à une droite* D, *et dans le plan qui les contient, on peut mener une infinité de droites qui ne rencontrent pas la première. Toutes ces non-sécantes sont situées dans un angle de sommet* A, *appelé angle de parallélisme.*

Cela posé, en tirant les conséquences logiques du nouveau système de postulats ainsi obtenus, il s'agit de montrer qu'on obtiendra une géométrie exempte de toute incompatibilité. Pour cela, nous aurons recours à la théorie des multiplicités riemaniennes.

262. Indications tirées de la théorie des multiplicités riemaniennes. — La compatibilité des postulats sur lesquels est édifiée une géométrie riemanienne résulte immédiatement de la possibilité de traduire en formules les concepts et les propositions d'une telle géométrie. A un autre point de vue, on peut encore dire que la géométrie d'une multiplicité est un ensemble de propositions prélevées sur la géométrie d'un espace euclidien qui baigne cette multiplicité.

Cela posé, pour montrer la possibilité de construire une géométrie à trois dimensions, non euclidienne et exempte cependant d'incompatibilité, nous considérerons la multiplicité riemanienne (μ) qui a pour élément linéaire

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(R^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2}.$$

A chaque point M de (μ), nous ferons correspondre, dans un espace auxiliaire (ε) de nature euclidienne, le point P qui, dans ce dernier, a pour coordonnées rectangulaires x, y, z. L'élément linéaire de (ε) sera donc

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

On voit immédiatement que, dans la correspondance entre M et P, les angles seront conservés. D'autre part, nous nous bornerons à envisager dans la multiplicité (μ) l'ensemble des points M qui proviennent des points P intérieurs à la sphère

$$\text{(S)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

de l'espace (ε). Voici une autre remarque très importante. Faisons, dans l'espace ε, une inversion quelconque, et appliquons-la tout particulièrement au système de la sphère (S) et de la sphère de centre P et de rayon $d\sigma$. Un système de deux sphères de rayons a et b, dont les centres sont séparés par une distance d, possède, vis-à-vis de toutes les inversions, un invariant lié à l'angle de ces sphères, soit

$$\frac{ab}{a^2 + b^2 - d^2}.$$

Appliquons cette remarque au cas actuel où une de nos sphères possède un rayon $d\sigma$ infiniment petit. Nous obtenons l'invariant

$$\frac{\mathrm{R}d\sigma}{\mathrm{R}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}.$$

Ce résultat peut être interprété de la manière suivante :

Envisageons, dans l'espace (ε), les inversions qui conservent la sphère (S). Il leur correspond, dans la multiplicité (μ), des transformations entre points de cette dernière qui laissent son élément linéaire inaltéré. Ces transformations sont donc isométriques; d'autre part, elles changent le sens des angles. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

Pour le moment, désignons par (Γ) les transformées, dans (ε), des lignes géodésiques de (μ). Elles forment une famille à quatre paramètres. Or la forme de l'élément de (μ) en coordonnées sphériques, soit

$$\frac{d\rho^2+\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)}{(\mathrm{R}^2-\rho^2)^2}$$

montre immédiatement que les lignes $\theta=$ const., $\varphi=$ const., autrement dit les rayons de la sphère (S) forment des lignes (Γ) particulières. Or, d'après ce qui précède, toute inversion conservant la sphère (S) donne à partir d'une ligne (Γ) une autre ligne (Γ). On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les géodésiques de la multiplicité (μ) *sont représentées, dans l'espace* (ε), *par les cercles* (Γ) *orthogonaux à la sphère* (S).

Par deux points P et P′ intérieurs à (S), il passe un cercle (Γ) et un seul. Donc, si nous appelons *droite*, dans la géométrie de la multiplicité (μ), une géodésique de cette multiplicité, nous pouvons dire que deux points déterminent une droite et une seule. De même, dans l'espace (ε), une sphère orthogonale à (S) est telle que tout cercle de la famille (Γ) qui possède, à l'intérieur de (S), deux points communs avec cette sphère y soit tout entier contenu. Dans la multiplicité (μ), les surfaces qui correspondent aux sphères orthogonales à (S) sont donc des *plans*, puisqu'elles jouissent de la propriété de contenir toute droite ayant avec elles deux points communs. On vérifie sans peine que ces droites et ces plans de la multiplicité (μ) satisfont aux postulats de l'appartenance. De même, il n'y a aucune difficulté en ce qui concerne les postulats de l'ordre, en raison de la correspondance biunivoque qui existe entre les points M de la multiplicité (μ) et les points P intérieurs à (S) dans l'espace (ε). Faisons seulement la remarque suivante : si le point P se rapproche indéfiniment de (S), le point M de (μ) s'éloigne indéfiniment sur cette multiplicité, et cela, parce que l'intégrale

$$\int_{\widetilde{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}}\frac{d\sigma}{\mathrm{R}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$$

augmente indéfiniment lorsque l'une des extrémités de l'arc $\widetilde{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ à laquelle on l'étend se rapproche de la surface de la sphère.

263. Étudions maintenant, dans cette géométrie, les notions de *figures égales* et de *déplacements*. Nous avons déjà dit un mot des inversions conservant la sphère (S). Pour qu'une telle inversion corresponde à une véritable transformation sur la multiplicité (μ), il faut qu'elle fasse correspondre à un point intérieur à la sphère (S) un autre point également intérieur, autrement dit que son pôle A soit à l'extérieur de (S). Dès lors, la sphère de centre A, qui est orthogonale à (S), aura chacun de ses points conservé par cette inversion. Sur (μ), la transformation isométrique correspondante sera donc *une symétrie par rapport à un plan*.

En composant maintenant deux inversions conservant la sphère (S) et dont les pôles sont ou bien tous deux extérieurs ou bien tous deux intérieurs à la sphère (S), nous aurons sur la multiplicité (μ) une transformation isométrique conservant le sens des angles, c'est-à-dire appartenant à la catégorie des déplacements. Supposons les pôles A et B de nos inversions extérieurs à S. Soient Σ_A et Σ_B les sphères de centres A et B, orthogonales à la sphère (S). Il peut arriver que ces sphères se coupent suivant un cercle Γ_{AB}. Chaque point de ce cercle demeurera invariable dans chaque inversion, et, par suite, dans leur transformation résultante. Cette dernière n'est d'ailleurs pas changée si aux sphères Σ_A et Σ_B on substitue deux autres sphères passant par le cercle Γ_{AB} et se coupant sous le même angle que les deux premières [1]. Au couple des points A et B, on pourra donc substituer un autre couple A′, B′ de points situés aussi sur l'axe du cercle Γ_{AB}, points qui seront liés par une correspondance homographique définie par la condition suivante : les segments de droite AB, A′B′, ... sont vus d'un point du cercle Γ_{AB} sous un angle constant. — Si nous revenons à la multiplicité (μ), les transformations composées qu'on obtient par cette méthode sont les rotations autour d'un axe, confondu avec la droite qui correspond au cercle Γ_{AB}.

Les points A et B étant toujours à l'extérieur de (S), supposons que le cercle Γ_{AB} soit imaginaire. Dans le faisceau déterminé par les sphères Σ_A et Σ_B, il y a deux sphères de rayon nul, dont les centres sont H et K. Toute sphère invariante dans les deux inversions et en particulier la sphère (S) appartient au réseau des sphères orthogonales à Σ_A et Σ_B; elle passe donc par H et K. Puisque les sphères passant par H et K sont orthogonales à Σ_A, ces points se correspondent dans l'inversion de pôle A. Il en est de même dans l'inversion de pôle B. Donc H et K sont deux points invariants de la transformation composée de ces deux inversions, à l'exclusion

(1) Voici la démonstration de cette proposition : les deux inversions envisagées peuvent être regardées comme définies par leurs sphères *fondamentales* Σ_A et Σ_B. Lorsqu'une inversion est définie par ce procédé, deux points P et P′ sont inverses si tout cercle passant par ces points est orthogonal à la sphère fondamentale. Il résulte de là que la transformée d'une inversion J par une inversion I est encore une autre inversion J′, dont la sphère fondamentale se déduit par l'inversion I de la sphère fondamentale de l'inversion J. Cela posé, considérons la transformation résultante des deux inversions dont les sphères fondamentales sont Σ_A et Σ_B. Transformons-la au moyen d'une inversion I, ayant son pôle sur le cercle d'intersection Γ_{AB}. Les deux nouvelles sphères fondamentales sont deux plans, la transformée de la résultante des deux inversions (Σ_A) et (Σ_B) est la résultante de deux symétries faites par rapport aux plans précédents. Cette transformation est donc une rotation. Le système des deux plans de symétrie n'est déterminé qu'à une rotation près. Il y a donc indétermination d'ordre un pour le système des sphères Σ_A et Σ_B, conformément à l'énoncé ci-dessus.

de tous les autres points, car un point invariant doit ou bien être tel dans chaque inversion ou bien provenir d'un couple associé à la fois dans les deux inversions. Cela posé, considérons la composée de nos deux inversions, transformons-la par une inversion de pôle H : nous obtiendrons une transformation qui conserve les droites issues du transformé de K [1], qui conserve d'ailleurs le point K, et qui conserve les angles, donc qui se réduit à une homothétie de centre K. En résumé, si les sphères fondamentales Σ_A et Σ_B ne sont pas sécantes, la transformation résultante des deux inversions s'obtient en transformant par inversion, par rapport à un certain point H, une homothétie de centre K.

Si Σ_A et Σ_B étaient tangentes, la transformation résultante des deux inversions s'obtiendrait en transformant par inversion, par rapport au point de contact de ces sphères, une translation dont la direction est tangente à la fois à (S), Σ_A, Σ_B.

Enfin, si A et B sont à l'intérieur de la sphère (S), la droite AB coupe celle-ci en deux points H et K qui sont associés dans chaque inversion, et par suite invariants dans la transformation résultante. On retombe sur une étude faite plus haut.

En résumé, l'étude des transformations déduites par composition de deux inversions conservant la sphère (S) nous fournit trois catégories de déplacements particuliers, essentiellement différentes si l'on se place au point de vue descriptif, mais, en revanche, ayant au point de vue analytique une origine commune. Une seule de ces catégories correspond, dans la multiplicité (μ), aux rotations autour d'une droite.

Mais ces déplacements ne sont pas les plus généraux. Effectivement, ils ne dépendent que de cinq paramètres, ou même seulement de quatre lorsque Σ_A et Σ_B sont tangentes. Pour obtenir les déplacements les plus généraux, à six paramètres, ou mieux les transformations correspondantes de l'espace (ε), essayons de caractériser la correspondance qu'elles établissent entre deux points Q et Q' de la sphère (S). Cette correspondance est biunivoque, elle conserve la grandeur et le sens des angles. Sa transformée par une inversion, dont le pôle est choisi sur la surface (S), est donc une dépendance analytique

$$z' = f(z)$$

entre les affixes z et z' des inverses de Q et de Q', telle qu'à une valeur de z corresponde une seule valeur de z' et inversement. Donc cette dépendance est nécessairement homographique, et admet dans le plan complexe deux points doubles (susceptibles de se confondre). Il en résulte immédiatement que dans la correspondance entre les points Q et Q' de la sphère (S), il y aura de même deux points doubles H et K. Que devient la transformation cherchée quand on lui applique une inversion de pôle H? Une transformation conservant la grandeur et le sens des angles, qui laisse inaltérés l'inverse de K et le plan inverse de (S), c'est-à-dire une similitude obtenue en composant une homothétie par rapport à l'inverse de K et une rotation autour d'un axe mené par ce point perpendiculairement au plan inverse de (S).

(1) En effet, tout cercle passant par H et K est orthogonal aux deux sphères Σ_A et Σ_B. Il se correspond donc à lui-même dans chacune des deux inversions, et, par suite, dans la transformation résultante de ces inversions.

Les déplacements ainsi obtenus forment un groupe, qui présente certaines analogies avec le groupe des déplacements de la géométrie ordinaire. La plus importante est la conservation des éléments métriques. Soient deux points M_1 et M_2 de la multiplicité (μ). Tout déplacement conserve la longueur du segment M_1M_2, c'est-à-dire de l'arc géodésique joignant ces deux points. Soient P_1 et P_2 les deux points correspondants de l'espace (ε). A la géodésique M_1M_2 correspond le cercle orthogonal à (S) mené par P_1 et P_2. Désignons par Q_1 et Q_2 ses points de rencontre avec (S). Toute inversion, toute similitude, laissent inaltéré le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle [1]. On en déduit aisément que la longueur du segment M_1M_2 est une fonction du rapport anharmonique des quatre points P_1, P_2, Q_1, Q_2, qui doit être choisie de manière à satisfaire au théorème de Chasles

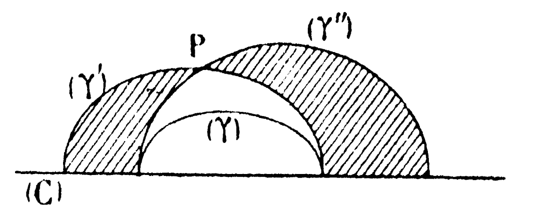
$$\overline{M_1M_3} = \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3}.$$

On en déduit aisément que cette fonction est de nature logarithmique. C'est ce que montrerait également le calcul direct de l'intégrale

$$\int_{\widetilde{PP_1}} \frac{d\sigma}{R^2 - \overline{OP}^2}$$

étendue à l'arc de cercle P_1P_2.

264. Après cette étude sommaire de la notion de déplacements et de figures congruentes, il nous reste à montrer que, dans la nouvelle géométrie, le postulat ordinaire des parallèles est remplacé par celui de Lobatchefski. Considérons la multiplicité (μ) : je dis que par un point M, dans le plan déterminé par ce point et une droite, on peut mener une infinité de droites non sécantes à la première. En effet, reportons-nous à l'espace (ε). Sur une sphère Σ qui coupe orthogonalement la sphère S suivant un cercle (C), il existe une infinité de cercles orthogonaux à (S), ce sont ceux qui coupent orthogonalement le cercle (C). Soit (γ) un tel cercle. Par un point P, pris sur Σ en dehors de (γ), on peut mener sur cette sphère deux sortes de cercles orthogonaux à (C), des cercles sécants à (γ) et des cercles non-sécants. Ils sont séparés par deux cercles (γ') et (γ''), tangents à (γ) en des points situés sur (C). Pour obtenir une figuration commode, nous avons utilisé une projection stéréographique, en prenant pour pôle un point du cercle (C) : celui-ci devient une droite. Les cercles orthogonaux à (C) deviennent des cercles centrés sur cette droite. Nous avons d'ailleurs conservé les mêmes notations pour les divers éléments de Σ et leurs projections stéréographiques. En outre, nous avons hachuré la région balayée par les cercles orthogonaux à (C) et non sécants à (γ), qui correspond à l'angle de parallélisme.



(1) Pour la similitude, le fait est évident ; pour l'inversion, il suffit de remarquer que si les deux cercles inverses ne sont pas dans un même plan, on obtient des figures en perspective. Or, de deux cercles inverses, on déduit par inversion deux nouveaux cercles inverses. Si donc on avait deux cercles inverses dans un même plan, on pourrait, par une inversion, en déduire deux cercles inverses non situés dans un même plan, pour lesquels la proposition est établie.

La théorie du parallélisme étant modifiée, certaines notions disparaissent de la nouvelle géométrie, entre autres celles de vecteur libre et de triangles semblables. Les translations formaient, dans la géométrie ordinaire, un sous-groupe important du groupe des déplacements. Ce sous-groupe n'a pas son analogue dans la géométrie de Lobatchefski. Donc le groupe des déplacements relatif à cette géométrie est différent du groupe des déplacements de la géométrie ordinaire. Ces divers points seront approfondis un peu plus loin.

L'exemple précédent est emprunté à H. Poincaré et a été cité par différents géomètres, à l'occasion des discussions relatives au postulatum d'Euclide [1]. Si l'on change R^2 en $-R^2$, on est ramené à l'étude d'une multiplicité (μ') ayant pour élément linéaire

$$ds^2 = \frac{d\sigma^2}{(R^2 + \overline{OP}^2)^2}$$

en supposant toujours qu'à chaque point M de la multiplicité (μ'), on fasse correspondre un point P d'un espace euclidien (ε) ayant précisément pour élément linéaire $d\sigma^2$. Aux géodésiques de la multiplicité (μ') correspondent dans l'espace (ε) des cercles orthogonaux à une sphère imaginaire de centre O et de rayon Ri, c'est-à-dire des cercles dont le plan contient le point O et par rapport auxquels ce point a une puissance égale à $-R^2$. Par deux points P et P' de l'espace (ε), il passe un seul de ces cercles, excepté si les points P et P' sont alignés avec le point O et si l'on a

$$\overline{OP}\,.\,\overline{OP'} = -R^2.$$

Tout cercle passant par P et P' satisfait alors aux conditions énoncées. On obtient donc, en revenant à la multiplicité (μ'), une géométrie dans laquelle il n'est pas toujours exact que deux points déterminent une seule droite et dans laquelle il n'y a pas de parallèles (puisque deux des cercles précédents situés dans un même plan sont nécessairement sécants).

Notons enfin qu'on obtient simultanément les géométries précédentes en étudiant les multiplicités dont l'élément linéaire est de la forme

$$\frac{d\sigma^2}{(1 - m\overline{OP}^2)^2}.$$

En donnant à m une valeur positive $\frac{1}{R^2}$, on obtient la géométrie de Lobatchefski; en faisant $m = 0$, on retrouve la géométrie ordinaire. Enfin en donnant à m une valeur négative $-\frac{1}{R^2}$, on obtient cette géométrie dont nous avons parlé à l'instant et où il n'est jamais question de droites non sécantes : cette dernière a été remarquée tout d'abord par Riemann lui-même. Nous allons montrer qu'on peut l'identifier avec la géométrie d'une hypersphère dans l'espace euclidien à quatre dimensions.

A cet effet, envisageons l'hypersphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 1$$

(1) Voir par exemple J. Hadamard : *Sur la méthode en géométrie*, notes extraites des *Leçons de géométrie plane*, page 25.

et utilisons la représentation paramétrique

$$X = \rho x, \qquad Y = \rho y, \qquad Z = \rho z, \qquad T = 1 - \rho,$$

en posant

$$\frac{2}{\rho} = x^2 + y^2 + z^2 + 1.$$

Un calcul simple donne immédiatement

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dT^2 = \rho^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \frac{4d\sigma^2}{(1 + \overline{OP}^2)^2},$$

ce qui justifie le résultat énoncé (1).

265. Relations des développements précédents avec la géométrie de Cayley. — Bornons-nous à la géométrie à deux dimensions. Parmi toutes les manières de construire dans le plan une géométrie qui est l'équivalent de la géométrie sphérique, nous envisagerons spécialement les deux suivantes :

1° Celle qui consiste à partir d'une sphère de centre O et à faire, sur un plan central, sa projection stéréographique. Aux géodésiques de la sphère, c'est-à-dire à ses grands cercles, correspondent des cercles du plan, par rapport auxquels le point O a une puissance constante $-R^2$. A une dimension près, c'est ce mode de construction que nous venons de rencontrer à l'instant.

2° Celle qui consiste à remplacer la projection stéréographique par une projection faite du centre O de la sphère. Dans ce nouveau mode, les géodésiques de la sphère ont pour représentation des droites du plan de projection.

Il est intéressant de chercher, dans les deux cas, comment on exprimera la distance de deux points de la sphère d'après la position de leurs représentations sur le plan. Désignons par M et M′ les points en question sur la sphère, par P et P′ leurs correspondants dans la représentation plane. La distance des points sur la sphère est proportionnelle à l'angle $MOM' = \varphi$. Examinons successivement les deux hypothèses précédentes.

1er Cas. — Considérons les droites isotropes OI et OJ du plan MOM′. D'après le théorème de Laguerre, nous avons

$$(467) \qquad (OM, OM', OI, OJ) = e^{2i\varphi},$$

en employant la notation du premier membre pour désigner le rapport anharmonique de quatre droites (2). Les droites OI et OJ sont situées sur le cône isotrope de sommet O. Désignons par A le centre de la projection stéréographique. Pour obtenir les perspectives de OI et de OJ, faites de A, sur le plan considéré, nous menons par A les parallèles à OI et OJ : ce sont deux génératrices du cône isotrope de sommet A, lequel coupe le plan du tableau suivant un cercle de centre O et de

(1) De ce résultat, on déduit aussi le suivant : la géométrie de Lobatchefski est encore celle d'une sphère ou plus généralement d'une hypersphère (suivant le nombre des dimensions) de rayon iR.

(2) Nous conviendrons de désigner plus spécialement par I et J les points cycliques du plan MOM′. Pour la démonstration du théorème de Laguerre, voir ma *Géométrie analytique*, chap. VII, page 206.

rayon iR. Les perspectives de I et J, faites de A, sont d'abord sur ce cercle imaginaire, ensuite sur la projection stéréographique du grand cercle MM'. Donc l'angle φ est indifféremment proportionnel au logarithme du rapport anharmonique des quatre points M, M', I, J sur ce grand cercle, ou à celui des quatre points P, P', Q, Q' sur sa projection stéréographique, en désignant par Q et Q' les points où cette dernière rencontre le cercle de centre O et de rayon iR, auquel sont orthogonales toutes les représentations stéréographiques de nos géodésiques. Nous retombons bien sur la définition de la distance rencontrée au cours de notre premier exposé.

2ᵉ Cas. — Supposons maintenant qu'on prenne le centre O de la sphère comme centre de projection, et, pour fixer les idées, prenons pour plan du tableau un plan tangent. En vertu de la relation (467), la distance MM' est encore une fonction logarithmique du rapport anharmonique de la division rectiligne, qui comprend d'une part les deux points P et P', d'autre part, les points de rencontre de la droite PP' avec un cercle imaginaire de rayon iR, intersection avec le plan du tableau du cône isotrope de sommet O.

Une généralisation facile nous fournit le résultat suivant :

Ayant tracé dans un plan un cercle (C), imaginaire ou réel, on obtient la même géométrie en appelant distance de deux points P et P' une fonction logarithmique du rapport anharmonique d'une division circulaire ou d'une division rectiligne, comprenant les deux points P et P' et les deux points d'intersection du cercle (C) et du support de la division, ce support étant astreint, s'il est circulaire, à être orthogonal à (C).

Le cas où le support est circulaire a été étudié précédemment. Le cas où le support est rectiligne a été développé par Cayley, qui a remarqué que ce genre de métrique est indépendant d'une transformation homographique.

Voici, pour l'espace à trois dimensions, les définitions fondamentales de la géométrie de Cayley. Considérons une quadrique (Q), à laquelle on donne le nom de *quadrique absolue*; par distance de deux points P et P', nous entendons une fonction logarithmique du rapport anharmonique de la division rectiligne qui comprend P, P' et deux points de (Q); par angle de deux plans, une fonction logarithmique du rapport anharmonique du faisceau de quatre plans formé par ces deux plans et deux plans tangents à la quadrique. Nous renverrons, pour l'étude complète de cette géométrie, aux *Principes de géométrie analytique* de Gaston Darboux, et nous nous bornerons aux remarques suivantes :

1° La géométrie de Lobatchefski s'obtient en supposant que (Q) soit une quadrique convexe et que les points P soient pris à l'intérieur de cette quadrique; la géométrie de Riemann, qui exclut l'existence de droites non-sécantes, s'obtient de même en supposant que (Q) soit purement imaginaire.

2° Les déplacements se ramènent purement et simplement aux transformations homographiques qui conservent la quadrique absolue. Les transformations homographiques les plus générales dépendent de quinze paramètres. En exprimant qu'une quadrique est conservée, on impose neuf conditions. Or, nous avons vu directement que les déplacements dépendent de six paramètres : nous trouvons, dans l'ordre d'idée actuel, une justification nouvelle de ce fait.

3° Pour obtenir la géométrie ordinaire, il suffit de supposer que la quadrique (Q) se réduise au cercle imaginaire de l'infini. Il faut noter que le groupe des transformations homographiques qui conservent ce cercle comprend non seulement les déplacements, mais plus généralement les similitudes. Il dépend de sept paramètres. Ce point sera éclairci un peu plus loin.

4° Dans le cas le plus général, on peut faire immédiatement les remarques suivantes : une transformation homographique conservant la quadrique (Q) fait correspondre à chaque génératrice une génératrice du même système. Soient G_1, G_2, G_3, G_4, quatre génératrices du premier système, qui coupent une génératrice Δ du second en quatre points, dont le rapport anharmonique est indépendant de Δ. Une transformation homographique conservant (Q) change G_1, G_2, G_3, G_4 en des droites G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 qui sont quatre génératrices du premier système et de même rapport anharmonique. Considérons l'homographie ainsi établie entre une génératrice G du premier système et sa correspondante G'. Elle comporte deux génératrices doubles (D) et (E). De même, dans le second système, notre transformation met en jeu une homographie qui comporte deux génératrices doubles (H) et (K). Les quatre sommets du quadrilatère gauche formé par les quatre génératrices (D), (E), (H), (K) sont les points doubles de notre homographie. Plaçons-nous dans le cas où (Q) est convexe et où il s'agit d'un déplacement réel. Alors, un plan tangent réel coupe la quadrique suivant deux génératrices imaginaires conjuguées, de systèmes différents. Donc, (D) et (H), (E) et (K) seront imaginaires conjuguées. Le point (D, H) et le point (E, K) seront réels; le point (D, K) et le point (E, H) seront imaginaires conjugués. Donc les droites qui joignent D, H et E, K d'une part, D, K et E, H d'autre part seront réelles. Ces droites qui restent inaltérées dans le déplacement sont appelées *axes* de ce déplacement. Elles sont *conjuguées* par rapport à la quadrique (Q).

5° Suivant le nombre des points invariants, on peut subdiviser les déplacements en *déplacements généraux*, où les seuls points invariants sont les quatre sommets du quadrilatère gauche des génératrices (D), (E), (H), (K), en *rotations* où tous les points d'une diagonale de ce quadrilatère sont invariants, en *retournements* (ou symétries par rapport à une droite) où tous les points de l'une et l'autre diagonale sont invariants [1]. Les retournements jouissent, à l'exclusion des autres déplacements, de la propriété suivante : en composant un retournement avec lui-même, on retombe sur la transformation identique. En effet, chaque diagonale a tous ses points invariants. Une droite qui s'appuie sur les deux diagonales se transforme donc en elle-

(1) Nous avons supposé essentiellement que l'homographie qui conserve Q altère chaque système de génératrices. Il pourrait arriver exceptionnellement qu'elle conserve l'un de ces systèmes, et transforme l'autre, qui posséderait encore deux droites doubles. Chaque point d'une de ces droites serait alors nécessairement un point invariant, et par suite toute droite rencontrant ces deux droites doubles serait inaltérée. Si la quadrique Q est une quadrique réelle convexe, cette particularité ne se présente jamais pour les homographies correspondant à des déplacements réels, car les deux systèmes de génératrices étant formés de droites imaginaires conjuguées, toute homographie réelle qui conserve l'un de ces systèmes conserve l'autre. — Notons encore que si (Q) est une quadrique réelle et convexe, les rotations proprement dites sont les déplacements qui laissent invariants tous les points de la diagonale du quadrilatère des points doubles sécante à (Q).

même, et la transformation y détermine une correspondance homographique, ayant pour points doubles les deux points d'appui, un couple homologue étant donné par les points d'intersection de cette droite avec la quadrique (Q). Le rapport anharmonique de ce couple avec les points doubles est -1, puisque les diagonales sont conjuguées par rapport à (Q). Cette homographie est donc réciproque.

Inversement, une homographie réciproque conservant la quadrique (Q) et différente de la transformation identique détermine sur les côtés du quadrilatère des points doubles des correspondances involutives. Appelons α, β, γ, δ les sommets de ce quadrilatère. Soient m et m' deux points correspondants dans le plan $\alpha\beta\gamma$. Les faisceaux

$$\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha m, \alpha m' \qquad \text{et} \qquad \gamma\beta, \gamma\alpha, \gamma m, \gamma m'$$

étant harmoniques et ayant un rayon commun, les points β, m, m' sont en ligne droite, ce qui montre que le point m' est situé sur βm et qu'il est le conjugué harmonique par rapport à β et m du point d'intersection de βm et de $\alpha\gamma$. Donc les points de $\alpha\gamma$ se correspondent à eux-mêmes dans la transformation, et pareillement ceux de $\beta\delta$.

6° Toute correspondance homographique sur une droite, telle que

$$\mu = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

peut, et d'une infinité de manières, être obtenue en composant deux transformations analogues, l'une et l'autre involutives. En effet, ou bien les points doubles sont distincts, et on peut se ramener au cas où leurs abscisses sont 0 et ∞ : l'homographie est alors une similitude, et on peut la regarder comme déduite de deux inversions (ou involutions) ayant pour point central commun le centre de similitude, la puissance de l'une d'elles étant arbitraire; dans le cas général cela revient à dire que la première involution est seulement assujettie à admettre comme couple associé les deux points doubles de la transformation proposée. Ou bien, les points doubles de cette dernière sont confondus, supposons-les à l'infini, l'homographie est une translation; on peut d'une infinité de manières la déduire de deux symétries, un seul des deux centres étant arbitraire.

Considérons alors un déplacement général : l'homographie à laquelle il soumet un système de génératrices, définie par sa trace sur une génératrice arbitraire du second système, équivaut, et cela d'une infinité de manières, à un produit de deux involutions. Donc tout déplacement peut, d'une infinité de manières, être regardé comme le produit de deux retournements. Les génératrices $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$, qui sont des éléments doubles de l'homographie appliquée au premier système de génératrices, se correspondront dans chacune des involutions composantes. On peut en dire autant de l'autre paire de génératrices. Donc les sommets opposés se correspondent dans chacun des retournements composants du déplacement étudié. Chacun de ces retournements est déterminé par ses deux axes, qui s'appuient sur ceux du déplacement résultant, c'est-à-dire sur $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ en deux points qui divisent harmoniquement ces deux segments.

266. Envisageons tous les modes de décomposition d'un déplacement D en deux retournements R et R'. Écrivons symboliquement

$$D = RR'.$$

Considérons la transformation DR', déduite par composition du déplacement D et du retournement R'. D'après l'égalité précédente, elle équivaut à RR'R'. Or R'R' équivaut à la transformation identique. On a donc symboliquement

$$DR' = R.$$

Cela posé, soit toujours $\alpha\beta\gamma\delta$ le quadrilatère fondamental du déplacement D, c'est-à-dire celui dont les couples de côtés opposés sont les génératrices doubles dans la transformation homographique à laquelle est soumise la quadrique (Q). *On peut choisir pour l'un des axes de* R' *une droite quelconque s'appuyant sur* $\alpha\gamma$ *et* $\beta\delta$. En effet, effectuons ce choix d'une manière arbitraire; l'autre axe de R' se trouvera déterminé, en tant que droite conjuguée du premier axe par rapport à (Q). Donc R' sera déterminé. Considérons la transformation composée DR'. Le déplacement D laisse invariante chaque paire de côtés opposés du quadrilatère fondamental. Le retournement R' échange les côtés de chaque paire. Il en est donc de même de DR'. Donc le déplacement résultant DR' échange aussi ces côtés. C'est donc un retournement R (C. Q. F. D.).

Ainsi, on peut choisir arbitrairement R', dans les conditions précédentes, et R en résulte. On démontre pareillement qu'on peut choisir R, d'une manière analogue, R' se trouvant, de ce fait, déterminé.

Dans la remarque précédente réside la solution du problème suivant :

Composer deux déplacements D *et* D'.

Il suffit à cet effet de les mettre respectivement sous la forme

$$D = RR', \qquad D' = R'R'', \tag{468}$$

de manière que le second retournement composant de D soit identique au premier retournement composant de D'. Car des égalités symboliques précédentes, on déduit alors

$$DD' = RR'R'R'' \qquad \text{ou} \qquad DD' = RR''.$$

Le déplacement résultant est ainsi défini au moyen des deux retournements composants R et R''. Ses axes sont déterminés par la condition de s'appuyer sur les quatre droites qui sont les axes respectifs de R et de R''.

Pour mettre D et D' sous la forme (468), il suffit de déterminer R'. Or les axes de R' doivent satisfaire à la condition de rencontrer les deux axes de D et les deux axes de D'. On sera donc ramené à ce problème classique : construire une droite s'appuyant sur quatre droites données. Sans insister davantage, remarquons que ces droites d'appui sont deux à deux conjuguées par rapport à la quadrique (Q). A toute droite répondant à la question correspond une autre droite y répondant aussi, la conjuguée de la première par rapport à (Q). Il y a d'ailleurs un seul couple de droites conjuguées fournissant la solution du problème, car l'une des droites d'appui

rencontre en deux points seulement la quadrique déterminée par les trois autres. Cela suffit à montrer que les axes de R′ seront déterminés d'une manière unique, et seront bien conjugués l'un de l'autre par rapport à (Q), comme l'exige la théorie précédente.

267. Lorsqu'on envisage le cas de la géométrie ordinaire, les déplacements ne forment plus qu'un sous-groupe dans l'ensemble des transformations (similitudes) qui conservent le cercle de l'infini, dégénérescence de la quadrique absolue. Il est intéressant d'apprendre à discerner les déplacements au sein de cet ensemble. Désignons par (C) la *conique absolue*, pour laquelle nous choisirons ultérieurement le cercle de l'infini. Les transformations homographiques qui conservent (C) déterminent sur cette conique une correspondance dans laquelle deux points α et β sont leurs propres homologues. Ces points sont deux des points doubles de la transformation. D'autre part, les tangentes à (C) en α et β sont globalement conservées et leur intersection fournit un troisième point double γ. Le quatrième sera en général extérieur au plan de (C), mais, à titre exceptionnel, il pourra se confondre avec l'un des précédents. En supposant que (C) soit le cercle de l'infini et que nous nous occupions exclusivement de transformations réelles, les points α et β seront imaginaires conjugués, γ sera réel, et par suite il en sera de même du quatrième point double δ. Donc si δ se confond avec un autre point double, ce point sera nécessairement γ. Ce cas exceptionnel peut s'obtenir comme cas limite du cas général, et ce point de vue a l'avantage d'attirer l'attention sur la position limite de la droite $\delta\gamma$, qui continue à jouer dans l'étude de la transformation un rôle important, en tant que droite globalement invariante. Cela posé, il est facile de voir que *le cas général correspond aux similitudes, et le cas exceptionnel aux déplacements*. En effet, soit d'abord une transformation de l'ensemble précédent, pour laquelle γ est confondu avec δ, et soit Δ la droite invariante menée par γ extérieurement au plan de (C). Cette transformation est la résultante de deux autres, dont l'une laisse invariants tous les points de Δ et agit sur les points du plan de (C) de la même manière que la transformation considérée, dont l'autre laisse invariants tous les points du plan de (C) et agit sur les points de Δ de la même manière que la transformation considérée. Lorsque (C) est le cercle de l'infini, la première de ces transformations composantes est une rotation autour de Δ ; la seconde, une translation parallèle à Δ. Soit maintenant une transformation pour laquelle δ est extérieur au plan de (C). On peut l'obtenir en composant une transformation, agissant comme elle sur les points du plan $\alpha\beta\gamma$, et ayant un point double confondu avec γ, avec une transformation du même type conservant chaque point du plan $\alpha\beta\gamma$, c'est-à-dire en composant un déplacement avec une homothétie.

En résumé, les déplacements de la géométrie ordinaire se présentent comme des transformations homographiques conservant une conique (C) et ayant deux points doubles confondus [il s'agit des deux points doubles non situés sur (C)] : ces points déterminent une droite qui est l'axe hélicoïdal du déplacement. Le second axe du déplacement est la droite $\alpha\beta$ des deux autres points doubles. Elle est ici rejetée à l'infini.

Exceptionnellement, il peut arriver que tous les points de l'axe hélicoïdal soient

doubles : le déplacement se réduit alors à une rotation. D'une manière plus particulière encore, il peut arriver en outre que tous les points de la droite $\alpha\beta$ soient invariants, et le déplacement se réduit à un retournement. La caractéristique des retournements, c'est qu'ils sont des déplacements déterminant une involution sur le cercle de l'infini.

D'après un théorème cité précédemment sur les correspondances homographiques, il suit de là qu'on peut, d'une infinité de manières, envisager un déplacement comme la résultante de deux retournements, dont les axes sont perpendiculaires à l'axe hélicoïdal du déplacement. De cette remarque, on déduit un processus de composition des déplacements euclidiens identique à celui que nous avons fait connaître pour les déplacements plus généraux de la géométrie de Cayley. Cette question peut d'ailleurs être exposée d'une manière autonome, par des considérations élémentaires; pour ce point, nous renverrons à la note de Gaston Darboux dans la *Cinématique* de Kœnigs, page 436. Nous nous contenterons de remarquer que deux retournements d'axes A et B déterminent un déplacement ayant pour axe une droite Δ, perpendiculaire commune à A et B, pour rotation une rotation autour de cet axe d'un angle égal à deux fois celui des axes A et B, pour translation fondamentale la translation double du vecteur qui a pour extrémités les pieds de la perpendiculaire commune précédente ; enfin, qu'en imprimant à A et B un déplacement hélicoïdal quelconque autour de l'axe Δ, le déplacement résultant reste inaltéré.

268. Construction de la géométrie à partir de l'idée de groupe. — Les développements précédents montrent l'importance offerte par l'étude du groupe des déplacements dans la géométrie de Cayley. L'étude de ce groupe s'identifie avec celle de cette géométrie elle-même. D'une manière générale, Sophus Lie a dégagé l'idée suivante :

Une géométrie consiste dans l'étude de certaines transformations ponctuelles formant un groupe.

Par exemple, la géométrie ordinaire n'est autre que l'étude du groupe des déplacements euclidiens et du groupe plus général des similitudes. Ses différents chapitres nous apparaissent comme consacrés à leurs divers sous-groupes : ainsi, la géométrie plane est obtenue en se restreignant aux déplacements qui conservent un plan ; ce sous-groupe admet à son tour des sous-groupes plus restreints : celui des translations, qui conduit à l'étude des parallèles et des parallélogrammes, celui des rotations conservant un point, qui conduit à l'étude des polygones réguliers et du cercle, suivant qu'on se borne à considérer les rotations multiples d'une rotation donnée, ou, au contraire, qu'on envisage toutes les valeurs possibles de l'angle de rotation, etc.... Dans l'espace, à côté du sous-groupe général des translations, il convient de mentionner particulièrement :

1° Les sous-groupes rotatifs, constitués par tous les déplacements qui conservent un point donné. Ces déplacements sont des rotations autour d'un axe issu de ce point. L'étude d'un sous-groupe rotatif et des opérations de composition au sein de ce sous-groupe est liée à la géométrie d'une sphère ayant pour centre le point commun à tous les axes de rotation, car une telle sphère est invariante dans ces rotations. Notons

que, dans un sous-groupe rotatif, il y a lieu de particulariser aussi certains sous-groupes discontinus, qui correspondent aux systèmes de déplacements qui superposent à lui-même un polyèdre régulier.

2° Les sous-groupes hélicoïdaux, constitués par les déplacements qui conservent une droite donnée et les cylindres de révolution qui l'admettent comme axe.

D'après cela, il est naturel de concevoir, avec Sophus Lie, Félix Klein, Henri Poincaré, etc., un nouveau mode de construction axiomatique, où la priorité reviendra aux concepts de point et de groupe de transformations ponctuelles. Les postulats auront alors pour objet d'énoncer les conditions qui caractérisent le groupe dont l'étude constitue le fondement essentiel de la géométrie considérée. Ces conditions auront trait à la structure du groupe, aux fonctions qu'il laisse invariantes, à ses sous-groupes.

C'est ainsi que l'étude des déplacements dans la géométrie de Cayley, déplacements qui forment un groupe, a mis en évidence les propriétés suivantes [1] :

1° Existence, pour chaque couple de points, d'une fonction de ces points invariante par tout déplacement, et appelée *distance de ces points.*

2° Existence de sous-groupes rotatifs, formés par les déplacements conservant un point donné.

3° Existence de faisceaux rotatifs, formés par les déplacements conservant deux points donnés, ou, si l'on veut, communs à deux sous-groupes rotatifs. Les déplacements d'un faisceau rotatif conservent, non seulement les deux points précédents, mais tous ceux de *la droite* qui les joint.

4° Caractère additif, ou plus exactement soumis à la relation de Chasles, des distances, affectées d'un signe, provenant de tous les accouplements possibles de trois points alignés.

5° Existence de sous-groupes conservant un plan, et obtenus par assemblage de faisceaux rotatifs : en se reportant à la représentation de la géométrie de Cayley dans l'espace ordinaire, on voit que ces sous-groupes sont formés de tous les faisceaux rotatifs dont l'axe passe par le pôle, par rapport à la quadrique absolue, du plan invariant.

6° Existence de sous-groupes hélicoïdaux, conservant une droite Δ. Chaque déplacement d'un tel sous-groupe peut être regardé comme la résultante de deux autres, dont l'un laisse invariant individuellement chaque point de Δ, tandis que l'autre laisse invariant chaque demi-plan passant par Δ, ou, si l'on préfère, chaque point de la droite conjuguée de Δ. Le premier est donc une rotation; le second, par certains caractères, évoque l'idée d'une translation le long de Δ.

La méthode que nous avons en vue consistera à énoncer *a priori* les propositions précédentes et à les regarder comme autant de postulats (ayant pour but de définir le groupe des déplacements). C'est donc bien le groupe, qui, dans l'ordre d'idées actuel, est le concept le plus important. La notion de droite n'est introduite que par

(1) Nous adoptons ici la terminologie proposée par Henri Poincaré dans son volume sur les fondements de la Géométrie (collection L. Rougier). Nous admettons qu'il s'agit de la géométrie à trois dimensions. En outre, nous engageons le lecteur à raisonner de préférence en supposant la quadrique absolue réelle et convexe.

l'intermédiaire du faisceau rotatif, c'est-à-dire de l'ensemble des déplacements conservant deux points, et, en même temps, nous postulons l'unicité de *la* droite qui joint ces points. La notion de plan est introduite d'une manière analogue, au moyen d'un sous-groupe obtenu par un assemblage convenable de faisceaux rotatifs, etc... (1).

Il serait laborieux de développer, d'une manière rigoureuse et complète, la thèse précédente. Aussi, nous nous contenterons de présenter quelques remarques particulièrement importantes.

Tout d'abord, si l'on s'en tient aux prémisses, extraites comme il vient d'être dit, des alinéas 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, et complétées par des postulats que nous négligeons d'énoncer, on pourra assurément, par voie déductive, construire sur ces assises une géométrie. Mais il est clair que ses théorèmes seront communs à tous les systèmes de Cayley, indépendamment du choix de la quadrique absolue (et, en particulier, ils seront vrais en géométrie d'Euclide).

Pour particulariser les déplacements euclidiens, il faut formuler d'autres hypothèses, qui s'appliquent à ces déplacements à l'exclusion des déplacements de la géométrie de Cayley. Dans ce but, nous aurons recours aux translations. Nous les avons rencontrées dans l'alinéa 6° : ce sont les transformations du sous-groupe hélicoïdal, relatif à un axe Δ, qui conservent un demi-plan, et, par suite, tous les demi-plans passant par cet axe. Or, en géométrie ordinaire, les translations ainsi définies forment dans le groupe des déplacements un sous-groupe invariant. Au contraire, dans la géométrie générale de Cayley, les translations ne forment pas un groupe : car, cette propriété n'appartient pas aux rotations, et il n'y a qu'une différence purement descriptive entre une translation et une rotation. Ces transformations participent en effet d'une définition analytique commune : ce sont les déplacements qui laissent invariants les points d'un de leurs axes, et la seule distinction réside dans le fait de savoir si cet axe est ou non sécant à la quadrique absolue (supposée, comme nous l'avons indiqué, réelle et convexe) (2).

Puisque le sous-groupe des translations est propre à caractériser, concurremment à d'autres conditions, la géométrie euclidienne, on peut se proposer d'en donner une définition directe, et d'en déduire ultérieurement le groupe des déplacements. On retombe ainsi sur le point de vue de M. H. Weyl, développé dans les deux premières parties de ces leçons, et qui se trouve rattaché, d'une manière naturelle, aux idées que nous venons d'exposer. On est conduit de la sorte à une géométrie dont les relations sont invariantes par les transformations d'un groupe au sein duquel les

(1) On pourrait dire : ceux qui conservent à une droite le pouvoir de s'appuyer sur deux droites concourantes.

(2) Il est facile de noter d'autres différences marquantes entre les translations ordinaires et celles de la géométrie de Cayley. Les premières conservent toute parallèle à la direction de la translation, ou, au point de vue projectif, toutes les droites et tous les plans menés par le point à l'infini dans cette direction, chaque point du plan de l'infini étant d'ailleurs conservé. Dans une translation cayleyenne, en dehors des deux droites jouant le rôle d'axes du déplacement, les seules droites invariantes sont les tangentes à la quadrique absolue, dont les points de contact sont sur l'axe le long duquel la translation se produit.

Ajoutons qu'en géométrie de Cayley, les faisceaux rotatifs d'un sous-groupe planaire laissent invariant un seul plan, tandis qu'en géométrie ordinaire, ils conservent tous les plans perpendiculaires à la direction commune des axes de ces faisceaux.

translations forment un sous-groupe invariant, c'est-à-dire à la géométrie linéaire. Pour obtenir ensuite les transformations métriques, il faut particulariser un sous-groupe du groupe linéaire : c'est ainsi qu'on est conduit à faire intervenir la forme quadratique fondamentale; cette notion, *a priori* un peu artificielle, le paraîtrait beaucoup moins après une recherche systématique des sous-groupes du groupe linéaire.

Nous avons rencontré, au cours des raisonnements précédents, des ensembles de théorèmes, logiquement autonomes, et qui peuvent s'obtenir par un prélèvement convenable dans le champ de la géométrie ordinaire. Telle est par exemple la géométrie linéaire. On rappelle cette relation en disant que la seconde est une géométrie partielle de la première. A son tour, la géométrie projective est une géométrie partielle de la géométrie linéaire (1). Cette dernière admet une autre géométrie partielle, que nous avons rencontrée ici, c'est l'*Analysis situs* : elle correspond au groupe des déformations, dont le groupe linéaire est un sous-groupe.

(1) La géométrie projective à n dimensions peut s'obtenir en prélevant dans la géométrie linéaire à $n+1$ dimensions, les théorèmes concernant les vecteurs libres et faisant intervenir, d'une manière exclusive leur direction (deux vecteurs V et λV étant considérés comme identiques, et comme déterminant un même point de l'espace projectif).

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Opérations vectorielles en géométrie linéaire.

DEUXIÈME PARTIE

Opérations vectorielles métriques.

TROISIÈME PARTIE

Opérations vectorielles infinitésimales.

NOTES ET COMPLÉMENTS

Coulommiers. — Imp. Paul BRODARD. — 3222-4-24.